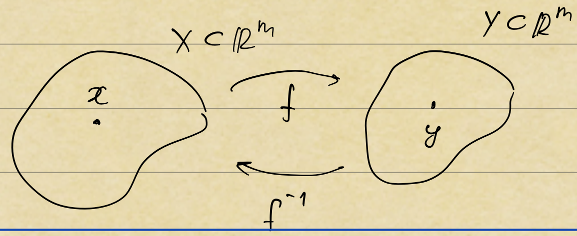
# Դիֆերենցման հատկությունները

$X \subset \mathbb{R}^m, \quad f: X \to \mathbb{R}^n, \quad x \in X$

$$f(x+h) - f(x) = Ah + r(h), \quad r(h) = o(|h|), \; h \to 0$$




$y = f(x)$

**Թեորեմ** (հակադարձ ֆունկցիայի դիֆերենցելիություն) $\boxed{X, Y\text{-ը բաց են}}$

Դիցուք տրված է $f: X \to Y$ փոխմիարժեք ֆունկցիա, ընդ որում.

- ~~$f$-ը անընդհատ է $x$-ում~~,
- $f$-ը դիֆերենցելի է $x$-ում և $Df(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ դարձելի է,
- $f^{-1}$-ը անընդհատ է $y$-ում: $(f^{-1}: Y \to X)$

Այդ $f^{-1}$-ը դիֆերենցելի է $y$-ում և $Df^{-1}(y) = (Df(x))^{-1}$:

$A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

**Սահմանում** Կասենք, որ $A$-ն դարձելի է, եթե այն փոխմիարժեք է:

$\boxed{\text{Լեմմ } A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \text{ դարձելի է} \Rightarrow m = n}$

$F: X \to Y$

- $F$-ը ինյեկտիվ է $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y \in X \quad F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$
- $F$-ը սյուրյեկտիվ է $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall y \in Y \; \exists x \in X \quad F(x) = y$
- $F$-ը փոխմիարժեք է $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $F$-ը ինյեկտիվ է և սյուրյեկտիվ

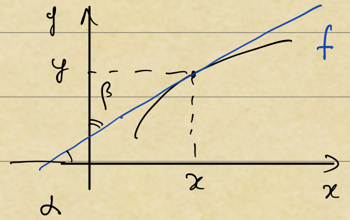
$F$-ի հակադարձը. $F: X \to Y, \quad y \in Y \to \exists!\, x \in X \quad F(x) = y$

$F^{-1}: Y \to X, \quad F^{-1}(y) = x$

**Ապացույց** $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$

$$\underbrace{(Df^{-1})(f(x))}_{L(\mathbb{R}^m)} \circ \underbrace{(Df)(x)}_{L(\mathbb{R}^m)} = I \Rightarrow Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}$$

$AB = I \Rightarrow A = B^{-1}$




$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \iff \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

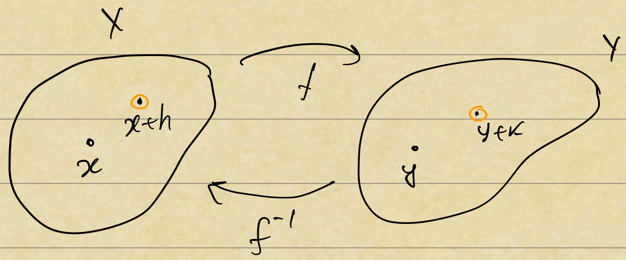
$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha, \quad (f^{-1})'(y) = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x)}$$

Ապացույց $\quad x \in X, \quad y = f(x) \in Y$

✓ $\quad f(x+h) - f(x) = Ah + r(h), \quad r(h) = o(|h|)$

$\quad g = f^{-1} : Y \to X$

? $\quad g(y+k) - g(y) = Bk + r_1(k), \quad r_1(k) = o(|k|)$




$k \in \mathbb{R}^m, \quad y+k \in Y \Rightarrow \exists h \in \mathbb{R}^m$

$\quad\Updownarrow$

$k \in Y - y \qquad f(x+h) = y+k$

$h(k) \to 0$, երբ $k \to 0$ (քանի որ $f^{-1}$-ը անընդհատ է $y$-ում)

$$y + k - y = A(g(y+k) - g(y)) + r(h(k)) \qquad x = g(y), \ x + h = g(y+k)$$

$$\Downarrow$$

$$g(y+k) - g(y) = A^{-1}k - A^{-1}r(h(k)), \qquad r_1(k) = -A^{-1}r(h(k))$$

$$\frac{|r_1(k)|}{|k|} = \frac{|-A^{-1}r(h(k))|}{|k|} \le C\frac{|r(h(k))|}{|k|} = C\underbrace{\frac{|r(h(k))|}{|h(k)|}}_{\to 0,\ k \to 0}\underbrace{\frac{|h(k)|}{|k|}}_{\le C_1 = 2C}$$

$$k = Ah + r(h) \iff Ah = k - r(h)$$
$$h = h(k)$$
$$\Rightarrow h = A^{-1}k - A^{-1}r(h)$$
$$\Rightarrow |h| \le C|k| + \underbrace{C\varepsilon}_{\le \frac{1}{2},\ \text{երբ } |k| < \delta}|h|, \quad \varepsilon \to 0, \text{ երբ } |k| \to 0$$
$$\Rightarrow |h(k)| \le 2C|k|, \quad |k| < \delta$$

∎

## Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j + o(|h|^k)$$

Напоминание $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}$

- $f \in C^1(X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall j \in [\![1, m]\!] \; \exists \, \frac{\partial f}{\partial x_j} := \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}, \; \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(X)$

$f \in C^1(X) \Rightarrow \forall x \in X$ f-я дифференцируема в x-ке,

$$df(x)h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j$$

- $k \geq 2$; $f \in C^k(X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \, i_1, .., i_\ell \in [\![1, m]\!]$, $1 \leq \ell \leq k$

$$\exists \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_{i_\ell}}\left(.. \frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)}_{\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{i_\ell} .. \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}} \in C(X)$$

Например $k = 2$, $m = 2$

$$f \in C^2(X) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2} \in C(X)$$

**Теорема** Пусть $f \in C^2(X)$. Тогда $\forall i, j \in [\![1, m]\!]$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

Интуиция $f(x+h) - f(x) = f'(x + \underset{(0,1)}{\theta} h) h \Leftrightarrow f'(x + \theta h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(1)$$

$$f''(x) \approx \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \approx \frac{f(x+2h) - f(x+h) - (f(x+h) - f(x))}{h^2}$$

$$= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

$m = 2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$

$$\underset{(h_1, h_2)}{\underset{\shortparallel}{\Delta(h)}} = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2 + h_2) h_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1' h_1, x_2) h_1$$

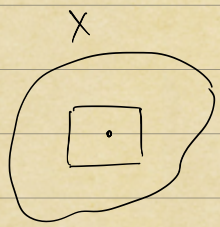
$$g(x_1) = f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)$$

$$g(x_1 + h_1) - g(x_1) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)$$

$$\Delta(h) = \varphi(x_1+h_1) - \varphi(x_1) = \varphi'(x_1+\theta_1 h_1)\, h_1$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,\, x_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,\, x_2) \right) h_1$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1+\theta_1 h_1,\, x_2+\theta_2 h_2)\, \cancel{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1+\theta_1' h_1,\, x_2+\theta_2' h_2)\, \cancel{h_1 h_2}$$



$$\theta_1 = \theta_1(h_1, h_2) \in (0,1), \quad \theta_1', \ \theta_2, \theta_2' \in (0,1)$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2)} + \underset{h_1,h_2\to 0}{o(1)} = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2)} + o(1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Թեորեմ}\quad \text{Դիցուք } k\geq 1,\ f\in C^k(X):\ \text{Այդ } \forall\, i_1,\dots i_l \in [\![1,m]\!],\ 1\leq l\leq k, \\ \forall \sigma:\{1,\dots,l\}\to\{1,\dots,l\} \qquad \forall x\in X \\ \qquad \dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_l}\dots\partial x_{i_1}}(x) = \dfrac{\partial^l f}{\partial x_{i_{\sigma(l)}}\dots\partial x_{i_{\sigma(1)}}} \end{array}}$$

$$(i_1,\dots i_k) \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_m^{\alpha_m}} =: \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \equiv \partial^\alpha f$$

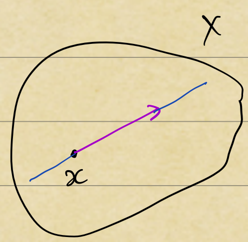
$$\alpha_1 = \#\{j\in[\![1,k]\!]: i_j=1\}, \quad \alpha_2 = \#\{j\in[\![1,k]\!]: i_j=2\}, \dots \quad \alpha_m = \#\{j\in[\![1,k]\!]: i_j=m\}$$

$$\alpha_1,\dots,\alpha_m\in\mathbb{Z}_+, \quad \alpha_1+\dots+\alpha_m = k$$

$$\alpha = (\alpha_1,\dots \alpha_m)\in\mathbb{Z}_+^m, \quad |\alpha| = \alpha_1+\dots+\alpha_m$$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_m^{\alpha_m}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Լեմմ}\quad \text{Դիցուք } f\in C^k(X),\ x\in X,\ h\in\mathbb{R}^m:\ \text{Այդ } \exists\,\delta>0 \quad t\mapsto f(x+th) \\ \text{ֆունկցիան պատկանում է } C^k((-\delta,\delta)) \text{ դասին:}\end{array}}$$



$$x+th, \quad t\in\mathbb{R}$$

**Ապացույց** $\quad g(t) = f(x+th) \Rightarrow g'(t) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x+th)h_j$

$$\Rightarrow g''(t) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x+th)h_ih_j \Rightarrow g^{(l)}(t) = \sum_{i_1,\dots i_l=1}^m \frac{\partial^l f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_l}}(x+th)h_{i_1}\dots h_{i_l}$$

**Սահմանում** $f \in C^k(X)$, $k \geq 1$, $x \in X$

$f$-ի $k$-րդ դիֆերենցիալ $x$-ում կանվանենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$\mathbb{R}^m \ni h \longmapsto d^k f(x)[h] = \frac{d^k}{dt^k} f(x+th)\Big|_{t=0}$$

**Օրինակ** $k=1$: $\quad df(x)[h] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j$

$k=2$: $\quad d^2 f(x)[h] = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i h_j$

**Թեորեմ** Դիցուք $f \in C^k(X)$: Այդ $\forall x \in X$ $\forall h \in \mathbb{R}^m$

$$d^k f(x)[h] = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha| = k}}' \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} \partial^\alpha f(x) h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m}$$

$$=: \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha$$

որտեղ $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_m!$, $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \dots h_m^{\alpha_m}$: