• $f(x,y)$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\exists \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$

$A := \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; $\varepsilon > 0$

$\exists\, \delta>0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad 0<|x|<\delta \ \& \ 0<|y|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \qquad A-\varepsilon < f(x,y) < A+\varepsilon$

$\Rightarrow \ \forall y,\ 0<|y|<\delta \qquad A-\varepsilon \le \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \le A+\varepsilon$

$\Rightarrow \qquad A-\varepsilon \le \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right) \le A+\varepsilon$

Քանի որ ε-ը կամայական էր, հաջորդական սահմանը հավասար է A-ի:

• $X \subset\subset \mathbb{R}^m$, $f: X\to\mathbb{R}^n$ անընդհատ է $\Rightarrow$ $f(X)$-ը կոմպակտ է

$Y\subset\mathbb{R}^n$ կոմպակտ է $\Leftrightarrow$ $\forall (y_j)_{j\ge 1}$ $\exists\, j_k\to+\infty$ $\exists\, y\in Y$ $y_{j_k}\to y,\ k\to+\infty$

$\{y_j\}$ հաջորդականություն $Y=f(X) \Rightarrow \forall j\ge 1 \ \exists\, x_j\in X \quad f(x_j)=y_j$

$\underset{X \text{ կոմպակտ է}}{\Rightarrow}$ $\exists\, j_k\to+\infty$ $\exists\, x\in X$ $x_{j_k}\to x$ $\underset{f \text{ անընդհատ է}}{\Rightarrow}$ $\begin{matrix} f(x_{j_k}) & \to & f(x) \\ \| & & \| \\ y_{j_k} & \to & y\in f(X)\end{matrix}$

• $f: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ անընդհատ է $\Leftrightarrow$ $\forall G\subset\mathbb{R}^n$ բաց $f^{-1}(G)\subset\mathbb{R}^m$ բաց է

Սահմանում. Դիցուք $X\subset\mathbb{R}^m$: Կասենք, որ $G\subset X$ բաց է, եթե $\exists\, \tilde{G}\subset\mathbb{R}^m$ բաց ենթաբազմություն, այնպիսին, որ $G=\tilde{G}\cap X$

Օրինակ $m=1$, $X=[0,1]$, $[0,\overset{\overset{1}{\vee}}{a})\subset X$ բաց է X-ում

$[0,a) = (-1,a)\cap X$

$X = (-1,2)\cap X$

Թեորեմ Դիցուք $X\subset\mathbb{R}^m$, $f: X\to\mathbb{R}^n$: Այդ f-ն անընդհատ է $\Leftrightarrow$ $\forall G\subset\mathbb{R}^m$ բաց $f^{-1}(G)\subset X$ բաց է:

Դիֆերենցիալի հատկությունները

$X\subset\mathbb{R}^m$ տիրույթ, $f: X\to\mathbb{R}^n$, $x\in X$

f-ը դիֆերենցելի է x-ում $\overset{def}{\iff} \exists A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\quad \forall h\in\mathbb{R}^m \quad x+h\in X$

$$f(x+h)-f(x)=Ah+r(h),\quad r(h)=o(|h|)$$

- f դիֆերենցելի է x-ում $\Rightarrow$ f անընդհատ է x-ում & $A=Df(x)=df(x)$ միակն է
- ա) f դիֆերենցելի է $\Rightarrow \forall j\in[1,m]\ \exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x+te_j)-f(x)}{t}$

բ) $\forall j\in[1,m]\ \exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}\in C(X) \Rightarrow$ f-ը դիֆերենցելի է X-ում, ընդ որում

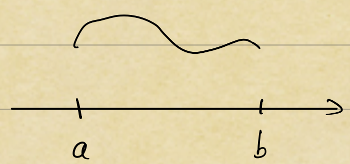
$$Df(x)[h]=\left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)h_j,\ i=1,\dots,n\right)$$

Օրինակ $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n,\ x\mapsto Bx,\quad B\in M_{n,m}(\mathbb{R})$

$\forall x\in\mathbb{R}^m\quad Df(x)=B$

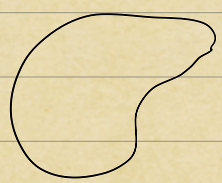
Թեորեմ Դիցուք X-ը սահմանափակ տիրույթ է $\mathbb{R}^m$-ում, իսկ $f:\overline{X}\to\mathbb{R}$ ֆունկցիան անընդհատ է, ածանցելի X-ի ներքին կետերում և հաստատուն ∂X-ի վրա: Ապա $\exists x\in\dot{X}\quad Df(x)=0$.

Ապացույց



$f(a)=f(b)$

$\forall x,y\in\partial X=\overline{X}\setminus\dot{X}=\overline{X}\setminus X\qquad f(x)=f(y)$



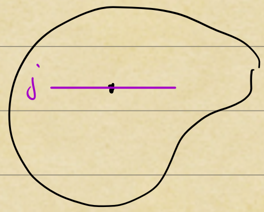
$f|_{\partial X}\equiv const$

- $\forall x\in X\ f(x)=const \Rightarrow \forall x\in X\ Df(x)=0$

$f(x+h)-f(x)=0=0h$

- $\exists x\in X\ f(x)\neq const$

Ենթադրենք, թե $f(x)<const$: Նշանակենք $m=\inf\limits_X f$: Ապա $\exists x_0\in X$ $f(x_0)=m$: Ապացուցենք, որ $Df(x_0)=0$



$x_j \mapsto f(x_1^0 \dots x_j \dots x_m^0)$, $x_0 = (x_1^0, \dots x_m^0)$
f_j

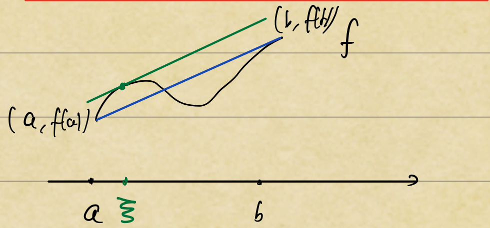
f_j-ն ունի մինիմում x_j^0 կետում $\Rightarrow f_j'(x_j^0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0$

$$\forall h \in \mathbb{R}^m \quad Df(x_0)[h] = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j = 0 \Rightarrow Df(x_0) = 0 \quad \blacksquare$$

Խնդիր Կառուցել $f: \underbrace{[0,1]\times[0,1]}_{\Pi} \to \mathbb{R}^2$ արտապատկերում, որ $f|_{\Pi} = 0$ և $Df(x) \neq 0$ $\forall x \in \Pi$:

Սահմանափակում $f: X \to \mathbb{R}^n$, $Y \subset X \longrightarrow g: Y \to \mathbb{R}^n$, $\forall x \in Y$ $g(x) = f(x) \Rightarrow g = f|_Y$

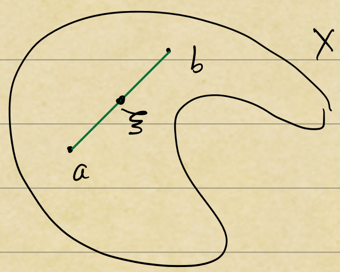
Միջին արժեքի թեորեմ



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

$$\Rightarrow |f(b)-f(a)| \le \left(\sup_{\xi\in(a,b)} |f'(\xi)|\right)|b-a|$$

Թեորեմ Դիցուք ուռուցիկ $X \subset \mathbb{R}^m$ տիրույթը և $f: X \to \mathbb{R}$ դիֆերենցելի ֆունկցիան: Ապա $\forall a,b \in X$ $[a,b] \subset X \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ $f(b)-f(a) = Df(\xi)(b-a)$:



$$[a,b] = \{a + t(b-a),\ t \in [0,1]\}$$

Ապացույց. $g: [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(a + t(b-a))$

g-ն ածանցելի է, $g'(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\dots)(b_j - a_j)$

$$\frac{d}{dt} f(\underbrace{\gamma_1(t), \dots \gamma_m(t)}_{\gamma(t)}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_j(t)$$

Լագրանժի թեորեմ $\Rightarrow \exists t_0 \in (0,1)$ $g(1) - g(0) = g'(t_0)$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underbrace{a + t_0(b-a)}_{\xi})(b_j - a_j) = Df(\xi)(b-a):$$

$Df(x) \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $|x| = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{1/2}$, $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\|A\| = \sup_{|x|\le 1} |Ax|$

Թեորեմ Դիցուք ուռուցիկ $X \subset \mathbb{R}^m$ տիրույթը և $f: X \to \mathbb{R}^n$ դիֆերենցելի ֆունկցիան: Ապա $\forall a,b \in X$ $[a,b] \subset X \Rightarrow |f(b)-f(a)| \le \sup_{\xi\in(a,b)} \|Df(\xi)\| \cdot |b-a|$

Ապացույց. $f: X \to \mathbb{R}^n \Rightarrow f = (f_1, \dots, f_n)$

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \exists \xi_i \in [a,b] \qquad f_i(b) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)(b_j - a_j)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(b) - f_i(a)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)(b_j - a_j) \right)^2$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)^2 (b_j - a_j)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j)^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\xi_i)^2 \right)}_{\substack{|Df(\xi_i)e_j|^2 \\ \leq \|Df(\xi_i)\|^2}}$$

$$\leq \underbrace{\left(\max_{i \in [\![1,n]\!]} \|Df(\xi_i)\|^2 \right)}_{\leq \sup_{\xi \in [a,b]} \|Df(\xi)\|^2} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} (b_j - a_j)^2}_{|b-a|^2}$$

$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$\downarrow$

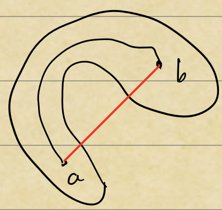
$(Ae_1 | \dots | Ae_m)$

$$|Ae_j|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$$

Հետևանք Դիցուք $X \subset \mathbb{R}^m$ տիրույթ է և $f: X \to \mathbb{R}^n$ դիֆերենցելի ֆունկցիա այնպիսին է, որ $Df(x) = 0 \quad \forall x \in X$: Ապա f-ը հաստատուն է:

Ապացույց Ցույց տանք, որ $\forall a, b \in X \quad f(a) = f(b)$

Քանի որ X-ը կապակցված է, ապա $\exists \gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^m)$



- $\forall t \in [0,1] \quad \gamma(t) \in X$
- $\gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b$

$$\underbrace{\gamma([0,1])}_{=:\Gamma} \cap \partial X = \emptyset \Rightarrow \overbrace{\inf_{x \in \Gamma,\, y \in \partial X} |x - y|}^{d} > 0.$$

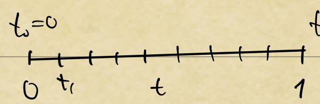
ապացուցել

Խնդիր $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^m$ փակ են, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

ա) Ճի՞շտ է արդյոք, որ $d := \inf_{x \in F_1,\, y \in F_2} |x - y| > 0$

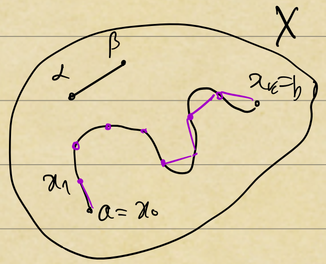
բ) Ապացուցել, որ եթե F_1-ը կոմպակտ է, ապա $d > 0$:

- $\exists \delta > 0 \quad \forall t_1, t_2 \in [0,1] \quad |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow [\gamma(t_1), \gamma(t_2)] \subset X$



$|t_i - t_{i-1}| < \delta \Rightarrow [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)] \subset X \Rightarrow f(\gamma(t_{i-1})) = f(\gamma(t_i)) \quad \forall i$

$\gamma(t_i) = x_i, \quad i = 0, \dots, k$



$$f(a) = f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_k) = f(b)$$

Քանի որ γ-ն հավասարաչափ անընդհատ է,

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, t_1, t_2 \in [0,1] \quad |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \frac{1}{2} d$$

$$x \in [\gamma(t_1), \gamma(t_2)]$$

$$\exists\, y \in \Gamma = \gamma([0,1]), \quad |x - y| < d \Rightarrow x \in X$$

$$|x - \gamma(t_1)| = |\theta\, \gamma(t_1) + (1-\theta)\, \gamma(t_2) - \gamma(t_1)| = |-(1-\theta)\, \gamma(t_1) + (1-\theta)\, \gamma(t_2)|$$

$$= |1-\theta|\, |\gamma(t_2) - \gamma(t_1)| < \frac{1}{2} d$$