§10. Ֆունկցիայի դիֆերենցումը

$$f: I \to \mathbb{R}, \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \iff f(x+h)-f(x) = f'(x)h + o(h), \ h\to 0$$

Սահմանում · $X \subset \mathbb{R}^m$ տիրույթ է $\overset{def}{\iff}$ X բաց է և կապակցված

· $f: X \to \mathbb{R}^n$, $x \in X$

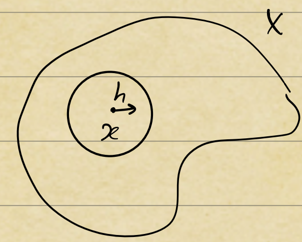
Կասենք, որ f-ը դիֆերենցելի է x կետում, եթե $\exists A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $\forall h \in \mathbb{R}^m$

$$x+h \in X \Rightarrow f(x+h) - f(x) = Ah + o(|h|), \quad |h| \to 0 \qquad (1)$$

Դիտողություններ 1) $m = n = 1$

$A \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $Ah = ah$, $a \in \mathbb{R}$

2) Եթե f-ը դիֆերենցելի է x-ում, ապա համապատասխան գծային արտապատկերումը միակն է.



$$(2) \qquad f(x+h) - f(x) = Bh + o(|h|) \Rightarrow B = A$$

$|h| \ll 1 \Rightarrow x+h \in X$

$$Ah + o(|h|) = Bh + o(|h|) \Rightarrow (A-B)h = o(|h|)$$

$$C \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \qquad Ch = o(|h|) \iff \frac{|Ch|}{|h|} \to 0, \quad |h| \to 0$$

$$\frac{\|Ch\|_1}{\|h\|_2} \le \frac{c_1 |Ch|}{c_2 |h|} \to 0$$

Ապացուցենք, որ $C = 0$:

$$(\exists \varepsilon > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^m \ |h| \le \varepsilon \Rightarrow Ch = 0) \Rightarrow C = 0$$

$$x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad Cx = \frac{|x|}{\varepsilon} \underbrace{C\left(\frac{x}{|x|}\varepsilon\right)}_{=0} = 0$$

$$|h| \le \varepsilon, \quad x+h \in X \Rightarrow Ch = o(|h|) \underset{|t|\le 1}{\Rightarrow} C(th) = o(|th|)$$

$$\Rightarrow Ch = t^{-1} o(|th|) \to 0, \text{ երբ } t \to 0 \Rightarrow Ch = 0$$

$$Ch = \alpha(h), \quad \frac{|\alpha(h)|}{|h|} \to 0, \quad |h| \to 0 \quad \Bigg| \quad t^{-1}\alpha(th) = |h| \frac{\alpha(th)}{\underbrace{|th|}_{\to 0,\ t \to 0}} \to 0$$

Նշանակում $A = Df(x),\ df(x),\ f'(x)$ f-ի դիֆերենցիալը x կետում

$m=n=1$, $Df(x)h = f'(x)h$

Լեմմ Եթե f-ը դիֆերենցելի է x կետում, ապա այն անընդհատ է x-ում:

Ապացույց $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x) \iff \lim\limits_{y\to x} f(y) = f(x)$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \underset{\substack{\shortparallel \\ o(|h|)}}{\alpha(h)} \to 0, \text{ երբ } |h|\to 0$$ ∎

Լեմմ Դիցուք տրված է $f: X\to\mathbb{R}^n$ ֆունկցիան, $f=(f_1,\dots,f_n)$, $f_i: X\to\mathbb{R}$: Ապա f-ը դիֆերենցելի է x-ում $\iff \forall i\in[1,n]$ f_i-երը դիֆերենցելի են:

Ապացույց $f(x+h)-f(x) = Ah + \alpha(h)$, $\alpha(h) = o(|h|)$

$$\Updownarrow$$

$$f_i(x+h) - f_i(x) = A_i h + \alpha_i(h),\quad i=1,\dots,n,\quad A_i\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$$

f-ը դիֆերենցելի է $\iff \dfrac{|\alpha(h)|}{|h|} \underset{|h|\to 0}{\to} 0 \iff |h|^{-1}\left(\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i(h)^2\right)^{1/2} \to 0,\ |h|\to 0$

$\iff \forall i\in[1,n]\ \dfrac{|\alpha_i(h)|}{|h|}\to 0,\ |h|\to 0$: ∎

$f: X\to\mathbb{R}$, $f(x+h)-f(x) = Ah + o(|h|)$, $A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$

$$Ah = \sum_{j=1}^m a_j h_j,\quad a_j\in\mathbb{R},\quad h=(h_1,\dots,h_m)$$

$\alpha(h) = o(|h|) \Rightarrow \alpha(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{t},0\dots0) = o(|t|)$

$\dfrac{|\alpha(h)|}{|h|}\to 0,\ |h|\to 0$; $h=(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ j}}{t},0\dots0) \Rightarrow \dfrac{|\alpha(0\dots t\dots 0)|}{|t|}\to 0,\ t\to 0$

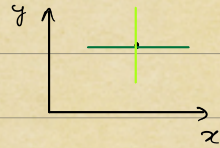
$$f(x_1,\dots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\dots,x_m) - f(x_1,\dots,x_m) = a_j t + o(|t|)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = a_j$$

Լեմմ f-ը դիֆերենցելի է $\Rightarrow \exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x+te_j)-f(x)}{t} = a_j$

Օրինակներ

1) 

2) $$f(x,y) = x^3 + y^2 \sin x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 \cos x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin x$$

Ցույց տանք f-ը դիֆերենցելի է, այսինքն $Df(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ գործում է հետևյալ կանոնով.

$$Df(x,y) \underset{}{\overset{(h_1,\, h_2)}{\overset{\shortparallel}{h}}} = (3x^2 + y^2 \cos x) h_1 + (2y \sin x) h_2$$

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) - Df(x,y)h =: \alpha(h), \quad \frac{|\alpha(h)|}{|h|} \to 0, \quad |h| \to 0$$

$$\alpha(h) = (x+h_1)^3 + (y+h_2)^2 \sin(x+h_1) - \overline{\cancel{x^3} - \cancel{y^2 \sin x} - (\cancel{3x^2} + \cancel{y^2 \cos x}) h_1 - (\cancel{2y \sin x}) h_2}$$

$$= \cancel{x^3} + \cancel{3x^2 h_1} + \underset{O(h_1^2)}{\underset{\shortparallel}{\alpha_1(h_1)}} + (\cancel{y^2} + \cancel{2y h_2} + \underset{O(h_2^2)}{\underset{\shortparallel}{\alpha_2(h_2)}})(\cancel{\sin x} + \cancel{(\cos x)} h_1 + \underset{O(h_1^2)}{\underset{\shortparallel}{\alpha_3(h_1)}}) - \dots$$

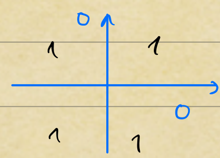
$$= \alpha_1(h_1) + O(h_2^2) + O(h_1^2) + 2y \cos x \, h_1 h_2 = O(h_1^2 + h_2^2) = o(|h|)$$

3) $$\pi_j(x) = x_j, \quad \pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

$$\pi_j(x+h) - \pi_j(x) = (x+h)_j - x_j = h_j \Rightarrow d\pi_j(x) h = h_j \overset{def}{\Leftrightarrow} dx_j(h) = h_j$$

$$df(x)h = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_j = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j(h) \Leftrightarrow \boxed{df = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j}$$

4) $$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

5) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad f(t,0) = \frac{t \cdot 0}{t^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \quad \lim_{t \to 0} f(t,0) = 0; \quad \lim_{t \to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$$

$$f: X \to \mathbb{R}^n, \quad f = (f_1, \dots, f_n), \quad Df_i(x)h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) h_j$$

$$\begin{pmatrix} f_1(x+h) \\ \vdots \\ f_n(x+h) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) h_j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) h_j \end{pmatrix}} + o(|h|)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$$

Սահմանում. Եթե $f: X \to \mathbb{R}^n$ ֆունկցիան դիֆֆերենցելի է x-ում, ապա $Df(x)$-ը գրվում է հետևյալ մատրիցով.

$$f'(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$$ Յակոբիի (Jacobi) մատրից

$n \times m$

Թեորեմ Դիցուք $f: X \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(X, \mathbb{R})$, $1 \le j \le m$: Այդ f-ը դիֆֆերենցելի է X-ի յուրաքանչյուր կետում:

Ապացույց
$$f(x+h) - f(x) = f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2)$$

$m = 2$

$$= f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) + f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) h_2 + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2) h_1$$

$\exists \theta_1, \theta_2 \in [0, 1]$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) h_2 + \overbrace{\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 + \theta_1 h_1, x_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right)}_{\beta_1(h_1)} h_1 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right)}_{\beta_2(h_1, h_2)} h_2}^{\alpha(h)}$$

$$\beta_1(h_1) = o(1) \qquad \beta_2(h) = o(1)$$

$$\frac{|\alpha(h)|}{|h|} = \frac{|\beta_1(h_1)| \, |h_1|}{|h|} + \frac{|\beta_2(h)| \, |h_2|}{|h|} \le |\beta_1| + |\beta_2| \to 0 \Rightarrow \alpha = o(|h|) \quad \blacksquare$$