$\mathbb{R}^m$ վեկտորական [illegible]

$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots, x_m),\ x_j \in \mathbb{R}\ \forall j \in [\![1, m]\!] \}$

$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m)$, $\quad cx = (cx_1, \dots, cx_m)$

$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ գծային է $\overset{def}{\iff} \forall x, y \in \mathbb{R}^m\ \forall c \in \mathbb{R}\quad A(cx+y) = cAx + Ay$

$\{e_j\}_{j=1,\dots,m}$ ստանդարտ հենք $\mathbb{R}^m$-ում, $\{f_i\}_{i=1,\dots,n}$ $\mathbb{R}^n$

$e_j = (0, \dots, 0, \underset{\underset{j}{\uparrow}}{1}, 0 \dots 0)$

$A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \longrightarrow A = \underbrace{(Ae_1 \,|\, Ae_2 | \dots | Ae_m)}_{n \times m \text{ մատրից}}$, $\quad Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$, $\bar{A} = (a_{ij})$

Լեմմ ա) $A, B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Rightarrow cA + B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\overline{cA+B} = c\bar{A} + \bar{B}$

բ) $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $B \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \Rightarrow B \cdot A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$, $\underset{k\times m}{\overline{B \cdot A}} = \underset{k \times n}{\bar{B}} \cdot \underset{n \times m}{\bar{A}}$

Ապացույց

ա) $(cA+B)(x) := cAx + Bx$

$$(cA+B)(x+y) = cA(x+y) + B(x+y) = c(Ax + Ay) + Bx + By$$
$$= (cAx + Bx) + (cAy + By) = (cA+B)(x) + (cA+B)(y)$$

$\overline{cA+B} = (d_{ij})$, $\quad (cA+B)e_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij} f_i$

$$(cA+B)e_j = cAe_j + Be_j = c\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (ca_{ij} + b_{ij}) f_i$$
$$\Rightarrow d_{ij} = ca_{ij} + b_{ij}$$

բ) $\underset{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k}{(B \cdot A)}(cx+y) = B(A(cx+y)) = B(cAx + Ay) = cB(Ax) + B(Ay)$

$$= c(B \cdot A)x + (B \cdot A)y$$

$\{g_e\}_{e=1,\dots k}$

$(B\cdot A)e_j = \sum_{e=1}^{k} d_{ej} g_e$, $\quad (B \cdot A) e_j = B(Ae_j) = B\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} Bf_i$

$d_{ej} = \sum_{i=1}^{n} b_{ei} a_{ij} = (\bar{B} \cdot \bar{A})_{ej}$ $\quad = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{e=1}^{k} b_{ei} g_e = \sum_{e=1}^{k} g_e \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ei} a_{ij} \right)$

$$A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \bar{A} \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$\bar{A} = (a_{ij}) \to A e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \Rightarrow A \sum_{j=1}^{m} x_j e_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \Big) f_i$$

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\uparrow}{Ax}} = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j ,\ i = 1, \dots, n \Big)$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ - & & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Նորմ $\mathbb{R}^m$-ում

Սահմանում Ֆունկցիա, որ $N : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ նորմ է, եթե.

- $\forall x \in \mathbb{R}^m \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}^m \ \forall c \in \mathbb{R} \quad N(cx) = |c| N(x)$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

N նորմ $\to$ $|\cdot|$ կամ $\|\cdot\|$

Օրինակներ ա) $|x| = \Big(\sum_{j=1}^{m} x_j^2 \Big)^{1/2} = d(x, 0)$ Էվկլիդեսյան նորմ

$$|x| = (x, x)^{\frac{1}{2}}, \quad (x, y) := \sum_{j=1}^{m} x_j y_j$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \quad (x, y) = (y, x)$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^m \ \forall c \in \mathbb{R} \quad (x + cy, z) = (x, z) + c(y, z)$
- $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Կոշի-Շվարցի անհավասարության ապացույց.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^m \ \forall t \in \mathbb{R} \quad (x + ty, x + ty) \geq 0 \Leftrightarrow (x, x) + t(y, x) + t(x, y) + t^2 (y, y) \geq 0$

$(y, y) t^2 + 2(x, y) t + (x, x) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - \underbrace{(x, x)}_{|x|^2} \underbrace{(y, y)}_{|y|^2} \leq 0 \Rightarrow |(x, y)| \leq |x| \cdot |y|$$

Cauchy - Schwarz անհավասարություն

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$$

բ) $|x|_1 = \sum_{j=1}^{m} |x_j|$, $|x|_\infty = \max\{|x_j|,\ 1\le j\le m\}$

$p\in(1,\infty)$, $|x|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}$

Լեմմ ա) $\forall y\in\mathbb{R}^m$ $L_y x = (x,y)$ գծային արտապատկերում է $\mathbb{R}^m$-ից $\mathbb{R}$

բ) $\forall L\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ $\exists$ միակ $y\in\mathbb{R}^m$ $\forall x\in\mathbb{R}^m$ $Lx=(x,y)$

ընդ որում, $\|L\| = |y|$

Սահմանում $A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \|A\| := \sup_{|x|_{\mathbb{R}^m}\le 1} |Ax|_{\mathbb{R}^n}$

$|\cdot|_{\mathbb{R}^m} = |\cdot|$, $|\cdot|_{\mathbb{R}^n} = |\cdot|$

Ապացույց ա) $L_y:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$

$L_y(cx_1+x_2) = (cx_1+x_2,y) = c(x_1,y)+(x_2,y) = cL_yx_1+L_yx_2$

բ) $L\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j \underset{\mathbb{R}}{\overset{y_j}{(Le_j)}} = (x,y)$, $y=(Le_1,\dots,Le_m)\in\mathbb{R}^m$

$Lx=(x,y)=(x,y') \Rightarrow (x,y-y')=0\ \ \forall x\in\mathbb{R}^m \underset{x=y-y'}{\Rightarrow} |y-y'|^2=0 \Rightarrow y-y'=0$

$Lx=(x,y)\ \ \forall x\in\mathbb{R}^m$, $\|L\| = \sup_{|x|\le 1}|(x,y)| \le \sup_{|x|\le 1}(|x|\cdot|y|) \le |y|$

$\|L\| = \sup_{|x|\le 1}|(x,y)| \underset{y\neq 0}{\overset{x=\frac{y}{|y|}}{\ge}} \left(\frac{y}{|y|},y\right) = \frac{1}{|y|}(y,y) = \frac{|y|^2}{|y|} = |y| \Rightarrow \|L\| = |y|$ ∎

Սահմանում Դիցուք $\|\cdot\|_1$ և $\|\cdot\|_2$ նորմեր են $\mathbb{R}^m$-ի վրա: Կասենք, որ նորմերը համարժեք են, եթե $\exists C>1$

$\forall x\in\mathbb{R}^m$ $C^{-1}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C\|x\|_2$

$\Updownarrow$

$\|x\|_1 \le C\|x\|_2$ & $\|x\|_2 \le C\|x\|_1$

Օրինակ $|x|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^p\right)^{1/p}$, $|x|_2 = |x|$, $|x|_\infty = \max\{|x_j|,\ 1\le j\le m\}$

Այս նորմերը համարժեք են:

$$\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2, \quad \|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_3 \Rightarrow \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_3$$

$$|x|_p \le \Big(\sum_{j=1}^{m} |x|_\infty^p\Big)^{1/p} \le |x|_\infty\, m^{1/p}, \quad |x|_\infty \le |x|_p$$

$$|x|_\infty = |x_1|, \quad \Big(\sum |x_j|^p\Big)^{1/p} \ge \big(|x_1|^p\big)^{1/p} = |x|_\infty$$

Թեորեմ Ցանկացած երկու նորմ $\mathbb{R}^m$-ի վրա համարժեք են:

Ապացույց Բավական է ապացուցել, որ ցանկացած $\|\cdot\|$ նորմ համարժեք է $|\cdot|_\infty$-ին:

$$x = \sum_{j=1}^m x_j e_j \Rightarrow \|x\| \le \sum_{j=1}^m \|x_j e_j\| = \sum_{j=1}^m |x_j|\,\|e_j\| \le |x|_\infty \underbrace{\sum_{j=1}^m \|e_j\|}_{=:C} \le C|x|_\infty$$

Ենթադրենք, թե $|\cdot|_\infty$ նորմը չի գնահատվում $\|\cdot\|$-ով: Այսպես

$$\forall n \ge 1 \quad x^{(n)} \in \mathbb{R}^m \quad |x^{(n)}|_\infty > n\|x^{(n)}\| \;:\; x^{(n)} \to \frac{x^{(n)}}{|x^{(n)}|_\infty}$$

Կարող ենք ենթադրել, որ $|x^{(n)}|_\infty = 1$

$$|x^{(n)}|_\infty = \max_j |x_j^{(n)}| = 1 \Rightarrow \begin{matrix}\forall j \in [1,m] \\ \forall n \ge 1\end{matrix} \quad |x_j^{(n)}| \le 1$$

$$B\text{-}W \Rightarrow \exists\, n_k \to +\infty \quad \forall j \in [1,m] \quad x_j^{(n_k)} \to x_j, \text{ երբ } k \to +\infty.$$

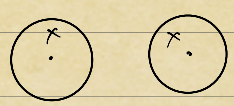
$$\max\{|x_j^{(n_k)}|,\ 1 \le j \le m\} = 1 \Rightarrow \max\{|x_j|,\ 1 \le j \le m\} = 1 \Rightarrow \underset{(x_1,\dots,x_m)}{\overset{\shortparallel}{|x|_\infty}} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\|x^{(n_k)}\| < \frac{1}{n_k} \to 0, \quad k \to \infty \\ &\|x^{(n_k)} - x\| \le C|x^{(n_k)} - x|_\infty \to 0, \quad k \to \infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0$$

Լեմմ Եթե $\{\varphi^{(n)}\}_{n \ge 1}$ հաջորդականությունն այնպիսին է, որ

$$\|\varphi^{(n)} - \varphi_1\| \to 0, \quad \|\varphi^{(n)} - \varphi_2\| \to 0, \text{ երբ } n \to \infty$$

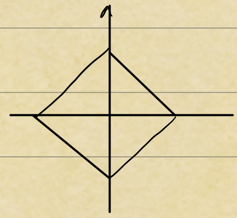
ապա $\varphi_1 = \varphi_2$



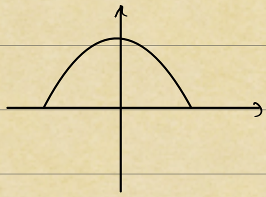
$$\dim L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = m \cdot n$$

$\|\cdot\|$, $\quad x, y \in B(0,1) \Rightarrow \|tx+(1-t)y\| \le t\underbrace{\|x\|}_{\le 1} + (1-t)\underbrace{\|y\|}_{\le 1} \le 1$

$|x|_1$



$x, \ -x$



$K \subset \mathbb{R}^n \qquad |x| = \inf\{t>0 : t^{-1}x \in K\}$