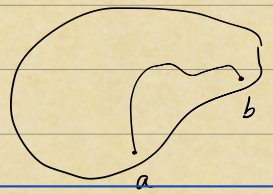
Անընդհատ ֆունկցիաների հատկություններ

$X \subset \mathbb{R}^m, \quad f: X \to \mathbb{R}^n$

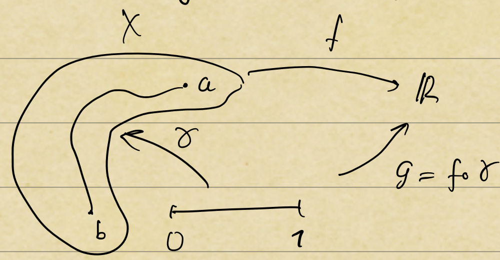
Սահմանում X կապակցված է $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a, b \in X \ \exists \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^m$ անընդհատ.
$\gamma(0) = a, \ \gamma(1) = b, \ \forall t \in [0,1] \ \gamma(t) \in X$



Թեորեմ Դիցուք $X \subset \mathbb{R}^m$ կապակցված է, $f: X \to \mathbb{R}$ անընդհատ:
Ապա $\forall a, b \in X \ \forall C \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in X \ f(x) = C$:

Ապացույց $a, b \in X, \ \exists \gamma: [0,1] \to X, \ \gamma(0) = a, \ \gamma(1) = b$

$g: [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(\gamma(t))$ ՍԱՐ



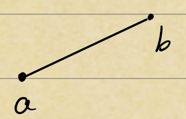
g-ն անընդհատ է $\Rightarrow \forall C \in [g(0), g(1)]$
$\exists t^* \in [0,1] \quad g(t^*) = C$

$f(\underbrace{\gamma(t^*)}_{x \in X}) = C \Rightarrow f(x) = C$

$g(0) = f(\gamma(0)) = f(a), \quad g(1) = f(\gamma(1)) = f(b)$ ∎

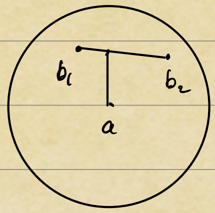
Օրինակներ ա/ $B(a,r)$ ուռուցիկ է $\quad \{a + t(b-a), \ t \in [0,1]\}$

Սահմանում $X \subset \mathbb{R}^m$ ուռուցիկ է $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a, b \in X \ \overset{!!}{[a,b]} \subset X$



$x, y \in \mathbb{R}^m, \quad x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$
$c \in \mathbb{R} \quad cx = (cx_1, \ldots, cx_m)$

$b_1, b_2 \in B(a,r), \quad t \in [0,1] \quad \underbrace{b_1 + t(b_2 - b_1)}_{x_t} \in B(a,r)$



$d(x_t, a) = d((1-t)b_1 + tb_2, a)$
$= d((1-t)b_1 + tb_2, (1-t)a + ta)$

$$= \Big(\sum_{j=1}^{m}\big((1-t)b_{1j} + t b_{2j} - (1-t)a_j - t a_j\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$d(x,-y) \le d(x,0) + d(-y,0)$$

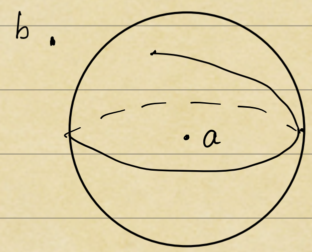
$$= \Big(\sum_{j=1}^{m}\big((1-t)(b_{1j}-a_j) + t(b_{2j}-a_j)\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$d(x+y,0) \le d(x,0) + d(y,0)$$

$$\le \Big(\sum_{j=1}^{m}\big((1-t)(b_{1j}-a_j)\big)^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{j=1}^{m}\big(t(b_{2j}-a_j)\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$= (1-t)\underbrace{d(b_1,a)}_{<r} + t\underbrace{d(b_2,a)}_{<r} < r$$

բ) $S(a,r)$, $a=0$



$a=(1,0,\dots,0)$ $\qquad b=(b_1,\dots,b_m)$

$$\sum_{j=1}^{m} b_j^2 = 1$$

$$\gamma(t) = (c(t),\ t b_2, \dots, t b_m)$$

$c(1) = b_1$, $c(0) = 1$

$$c(t)^2 + t^2 b_1^2 + \dots + t^2 b_m^2 = 1 \Rightarrow c(t) = \sqrt{1 - t^2 b_1^2 - \dots - t^2 b_m^2}$$

գ) $\mathbb{R}^m \setminus S(a,r) =: X$ կապակցված չի

$\underline{a=0}$ $\qquad a=0$, $b\in\mathbb{R}^m$, $d(b,0) > r$

$f(x) = x_1^2 + \dots + x_m^2$, $f(0)=0$, $f(b) > r^2$

X կապակցված է

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^m$ անընդհատ, $\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=b$

$$g(t) = f(\gamma(t)) \Rightarrow \exists t_* \in [0,1] \quad g(t_*) = r^2 \Rightarrow f(\underbrace{\gamma(t_*)}_{\notin X}) = r^2$$

Թեորեմ Դիցուք $X\subset\mathbb{R}^m$ կոմպակտ է, $f: X\to\mathbb{R}$ անընդհատ է: Այդ.

ա) f սահմանափակ է: $(\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n)$

բ) $\exists x_\pm \in X \quad \forall x\in X \quad f(x_-) \le f(x) \le f(x_+)$

Հետևանք $f: X \to \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists x_\pm \in X \quad \forall x\in X \quad d(f(x_-),0) \le d(f(x),0) \le d(f(x_+),0)$

$g(x) = d(f(x),0)$ անընդհատ; $|d(x,0) - d(y,0)| \le d(x,y)$

x_0-ի շրջակայք

Ապացույց ա) $\forall x_0 \in X \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \exists C_{x_0} > 0 \ \exists U(x_0) \ \forall x \in U(x_0)$

$f(x) \in B(0, C_{x_0})$

$X \subset \bigcup_{x_0 \in X} U(x_0) \underset{X \text{ կոմպակտ է}}{\Rightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_k \in X \quad X \subset \bigcup_{j=1}^{k} U(x_j)$

$C = \max\{C_{x_j},\ 1 \le j \le k\}$

$x \in X \Rightarrow \exists\, j \in [\![1,k]\!] \quad x \in U(x_j) \Rightarrow f(x) \in B(0, C_{x_j}) \subset B(0, C)$

$\Rightarrow f(X) \subset B(0, C)$ սահմանափակ է

բ) $M = \sup f(X) < \infty \Rightarrow \exists \{x_k\}_{k \ge 1} \subset X,\ f(x_k) \to M$, երբ $k \to +\infty$

X կոմպակտ է $\Rightarrow \exists\, k_j \to +\infty \ \exists x_* \in X \quad x_{k_j} \to x_*$, երբ $j \to +\infty$

$\Rightarrow$ $f(x_{k_j}) \to f(x_*) = M$

f-ը անընդհատ է

$f: X \to \mathbb{R}^n, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

Դիտողություն f-ը անընդհատ է $\Leftrightarrow \forall j \in [\![1,n]\!] \ f_j: X \to \mathbb{R}$ անընդհատ է

$f_j = \pi_j \circ f, \quad \pi_j : y \to y_j, \quad y = (y_1, \dots, y_n) \qquad |\pi_j(y) - \pi_j(z)| \le d(y,z)$

$d(f(x), f(y)) \le n \max_{1 \le j \le n} |f_j(x) - f_j(y)|$

Թեորեմ Դիցուք $X \subset \mathbb{R}^m$ կոմպակտ է, $f: X \to \mathbb{R}^n$ անընդհատ է: Ապա $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ կոմպակտ է:

Լեմմա. • $f: X \to \mathbb{R}^n$

f-ը անընդհատ է $\Leftrightarrow \forall U \subset \mathbb{R}^n$ U-ն բաց է $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ բաց է

$Y \subset \mathbb{R}^n, \quad f^{-1}(Y) := \{x \in X : f(x) \in Y\}$

$V \subset X$

V-ն բաց է $\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists\, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ բաց բազմություն, որ $\tilde{V} \cap X = V$

$X \subset \mathbb{R}^m$ բաց բազմություն. $V \subset X$ բաց է $\Leftrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ բաց է

Օրինակ $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$

$V = [0, \frac{1}{2}) \subset X$; $V \subset \mathbb{R}$ բաց չի

$V \subset X$ բաց է, $V = \underbrace{(-1, \frac{1}{2})}_{\tilde{V}} \cap X$

• $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ անընդհատ է, $X \subset \mathbb{R}^m$ կոմպակտ $\Rightarrow f(X)$ կոմպակտ է

§9. $\mathbb{R}^m$ վեկտորական գործողությունները

$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots x_m) : \forall j \in [1,m] \ x_j \in \mathbb{R} \}$

$x, y \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R} \to cx + y := (cx_1 + y_1, \dots cx_m + y_m)$

Հենք $\mathbb{R}^m$-ում. $e_j = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0, \dots 0)$, $j = 1, \dots, m$

$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad \exists! \ c_1, \dots c_m \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{j=1}^m c_j e_j$

$x = (x_1 \dots x_m)$, $c_j = x_j$
$$\sum_{j=1}^m c_j e_j = \sum_{j=1}^m (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{c_j}, 0 \dots 0) = (c_1, \dots c_m)$$

Սահմանում Կասենք, որ $\{f_1, \dots f_k\} \subset \mathbb{R}^m$ հենք է, եթե $\forall x \in \mathbb{R}^m$
$\exists! \ c_1, \dots c_k \in \mathbb{R} \quad x = \sum_{j=1}^k c_j f_j$

$$\boxed{\text{Թեորեմ Կամայական հենք } \mathbb{R}^m\text{-ում կազմված է ուղիղ } m \text{ վեկտորից:}}$$

Սահմանում Կասենք, որ $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ գծային է, եթե $\forall x, y \in \mathbb{R}^m \ \forall c \in \mathbb{R}$

$$L(cx + y) = c L(x) + L(y)$$

$$L(e_j), \ j = 1, \dots m \to Lx = L(\sum_{j=1}^m \underset{x_j}{c_j} e_j) = \sum_{j=1}^m L(c_j e_j) = \sum_{j=1}^m c_j Le_j$$

$\mathbb{R}^m \ \{e_1, \dots e_m\}$, $\mathbb{R}^n \ \{f_1, \dots f_n\}$

$$\underset{1 \le j \le m}{Le_j} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow Le_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} f_i, \quad L \to A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} Le_1 & Le_2 & & Le_m \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{pmatrix} \end{array}, \quad n \times m$$

$$x = \sum_{j=1}^m c_j e_j \Rightarrow Lx = L\left(\sum_{j=1}^m c_j e_j\right) = \sum_{j=1}^m c_j Le_j$$

$$Lx = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_j\right)$$

$$Lx = \sum_{i=1}^{n} (Lx)_i f_i, \qquad (Lx)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j$$

$$\begin{pmatrix} (Lx)_1 \\ \vdots \\ (Lx)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ - & - & - \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Սահմանում $\quad L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{ L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ գծային $\}$

$A, B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),\ c \in \mathbb{R} \to cA + B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$

$(cA+B)(x) = c\,Ax + Bx$

Խնդիր $\quad$ Կառուցել նորմ $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$-ում: Այն կոչենք ո.մ. նորմ:

Խնդիր $\quad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, $\exists \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$

Ցույց տալ, որ այդ սահմանները հավասար են: