Անընդհատ ֆունկցիաների հատկությունները

$X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$ կուտակման կետ

$\Updownarrow$

$\exists \{x_k\} \subset X,\ x_k \neq x_0\ \forall k \geq 1,\ x_k \to x_0$

Սահմանում f-ը անընդհատ է x_0-ում $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Թեորեմ Հետևյալ պայմանները համարժեք են.

ա) f-ը անընդհատ է x_0-ում:

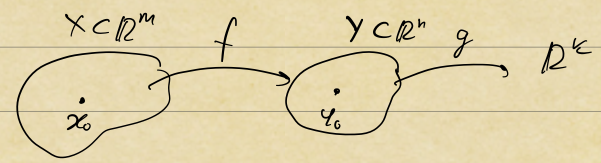
բ) $\omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, B(x_0, \delta) \cap X) = 0$:

գ) $\{x_k\}_{k \geq 1} \subset X,\ x_k \to x_0 \Rightarrow f(x_k) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$

դ) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(x_0, \delta) \cap X\quad \underset{d(f(x), f(x_0))}{\underbrace{|f(x) - f(x_0)|}} < \varepsilon$

$y \in \mathbb{R}^n$, $|y| = d(y, 0) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2\right)^{1/2}$, $d(y, z) = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} (y_j - z_j)^2\right)^{1/2}$

- f, g անընդհատ են x_0-ում $\Rightarrow$
  - $\forall c \in \mathbb{R}$ $f + cg$ անընդհատ է x_0-ում
  - $n = 1 \Rightarrow fg$ — , — , —
  - $n = 1$, $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ — , —



- $f: X \to \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, $g: Y \to \mathbb{R}^k$
  $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $f(X) \subset Y$
  f անընդհատ է x_0-ում, g անընդհատ է y_0-ում $\Rightarrow$ $\underset{X \to \mathbb{R}^k}{g \circ f}$ անընդհատ է x_0

Ապացույց $\varepsilon > 0 \to \exists \delta_1 > 0\ \forall y \in Y \cap B(y_0, \delta_1)\quad d(g(y), g(y_0)) < \varepsilon$

$\exists \delta > 0\ \forall x \in X \cap B(x_0, \delta)\quad d(f(x), \underset{y}{f(x_0)}) < \delta_1 \Longleftrightarrow f(x) \in B(y_0, \delta_1) \cap Y$

$\Rightarrow d(g(f(x)), g(f(x_0))) < \varepsilon \Rightarrow g \circ f$ անընդհատ է x_0-ում ∎

Սահմանում $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$

f-ը հավասարաչափ անընդհատ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

Դիտողություն f հավասարաչափ անընդհատ է $\Rightarrow \forall x_0 \in X$ f-ը անընդհատ է x_0-ում

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Օրինակներ ա) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$

$f: X \to \mathbb{R}^n$ հավասարաչափ անընդհատ չէ $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in X$
$d(x_1, x_2) < \delta \ \& \ d(f(x_1), f(x_2)) \geq \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \exists \{x_1^k\}, \{x_2^k\} \subset X \quad d(x_1^k, x_2^k) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \ \& \ \forall k \geq 1 \ d(f(x_1^k), f(x_2^k)) \geq \varepsilon$$

$$d(f(x), f(x+\delta)) \underset{x>0,\, \delta>0}{=} (x+\delta)^2 - x^2 = 2\delta x + \delta^2 \geq 2x\delta$$

$$\varepsilon = 1, \quad x_k^1 = k, \quad x_k^2 = k + \frac{1}{k} \Rightarrow d(x_k^1, x_k^2) = \frac{1}{k} \to 0$$
$$d(f(x_k^1), f(x_k^2)) \geq 2k \frac{1}{k} = 2$$

բ) $f: (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\frac{1}{x}$ անընդհատ է

$$\varepsilon = 1, \quad x_k^1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad x_k^2 = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad x_k^1, x_k^2 \to 0, \ k \to \infty$$

$$d(x_k^1, x_k^2) \to 0, \quad d(f(x_k^1), f(x_k^2)) = 1 - (-1) = 2 \quad \forall k \geq 1$$

Թեորեմ Դիցուք X-ը կոմպակտ է $\mathbb{R}^m$-ում և $f: X \to \mathbb{R}^n$ ֆունկցիան անընդհատ է X-ի յուրաքանչյուր կետում: Այդ f-ը հավասարաչափ անընդհատ է:

Ապացույց Ենթադրենք, թե f-ը հավասարաչափ անընդհատ չէ.

$$\exists \varepsilon > 0 \ \exists \{x_k^1\}, \{x_k^2\} \subset X \quad d(x_k^1, x_k^2) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \ \& \ d(f(x_k^1), f(x_k^2)) \geq \varepsilon \quad \forall k \geq 1$$

X կոմպակտ է $\Rightarrow \{x_k^1\}$ պարունակում է ինչ-որ $x \in X$ կետին զուգամետ ենթահաջորդականություն

Կարող ենք ենթադրել որ $x_k^1 \to x \in X \Rightarrow d(x_k^2, x) \to 0 \Leftrightarrow x_k^2 \to x$

f-ը անընդհատ է x-ում $\Rightarrow$ $f(x_k^1) \to f(x)$, $f(x_k^2) \to f(x)$

$$\Rightarrow \quad d(f(x_k^1), f(x_k^2)) \le d(f(x_k^1), f(x)) + d(f(x), f(x_k^2)) \to 0$$

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\infty} \mathbb{N} \qquad x^1_{\varphi(k)} \to x, \qquad \underset{\downarrow \atop x}{y_k^1} = x^1_{\varphi(k)}, \quad y_k^2 = x^2_{\varphi(k)}$$

Սահմանում $\{f_\alpha : X \to \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in A}$, $x_0 \in X$

Կասենք, որ $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$-ն հավասարաչափ անընդհատ է x_0-ում, եթե

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta) \cap X \quad \overbrace{\quad}^{\forall \alpha \in A} \ d(f_\alpha(x), f_\alpha(x_0)) < \varepsilon$$

- f-ը անընդհատ է x_0-ում $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, B(x_0, \delta) \cap X) = 0 \Leftrightarrow \omega_f(\delta, x_0) \to 0$
  $= \sup\limits_{x \in B(x_0, \delta) \cap X} d(f(x), f(x_0))$
- f-ը հավասարաչափ անընդհատ է $\Leftrightarrow$ $\omega_f(\delta) := \sup\{d(f(x_1), f(x_2)) : d(x_1, x_2) < \delta\}$
  $\omega_f(\delta) \to 0$, երբ $\delta \to 0$
- $\{f_\alpha\}$-ն հավասարաչափ անընդհատ է x_0-ում $\Leftrightarrow$ $\sup\limits_{\alpha \in A} \omega_{f_\alpha}(\delta, x_0) \to 0$, $\delta \to 0$

Օրինակ եթե $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\exists C > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \quad \forall x \in B(x_0, \delta_0) \quad \forall \alpha \in A$

$$d(f_\alpha(x), f_\alpha(x_0)) \le C\, d(x, x_0)$$

$\{f_\alpha\}$-ն հավասարաչափ անընդհատ է x_0-ում.

$$\omega_{f_\alpha}(x_0, \delta) \le C\delta \quad \forall \alpha \in A \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha \in A} \omega_{f_\alpha}(x_0, \delta) \le C\delta \to 0, \text{ երբ } \delta \to 0:$$
$$\delta \le \delta_0$$

Օր) $\quad f_n(x) = \sin(nx)$, $\quad x \in [0, 1]$

$\{f_n\}$-ը հավասարաչափ անընդհատ չի $x_0 = 0$ կետում

$$|f_n(x) - f_n(0)| = |\sin(nx)| \le \varepsilon, \text{ երբ } 0 \le x \le \delta, \ n \ge 1$$

$$0 < x_n = \frac{\pi}{2n} < \delta, \quad \sin(n x_n) = 1$$

Լեմմ Դիցուք $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ֆունկցիան ածանցելի է ամենուրեք: Այդ f-ը բավարարում է Լիպշիցի պայմանին C հաստատունով ($\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $|f(x_1)-f(x_2)|\le C|x_1-x_2|$) այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall x\in[a,b]$ $|f'(x)|\le C$

$f_n'(x)=n\cos nx$, $f_n'(0)=n$

Թեորեմ Դիցուք $X\subset\mathbb{R}^m$ բազմությունը կոմպակտ է և $\{f_\alpha: X\to\mathbb{R}^n\}_{\alpha\in A}$ ֆունկցիաների ընտանիքը հավասարաստիճան անընդհատ է $\forall x_0\in X$ կետում: Այդ $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ հավասարաչափորեն հավասարաստիճան անընդհատ է.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall\alpha\in A\ \forall x_1,x_2\in X\quad d(x_1,x_2)<\delta\Rightarrow d(f_\alpha(x_1),f_\alpha(x_2))<\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{\alpha\in A}\omega_{f_\alpha}(\delta)=\sup_{\alpha\in A}\sup\{d(f_\alpha(x_1),f_\alpha(x_2)):\ d(x_1,x_2)\le\delta\}\xrightarrow[\delta\to0]{}0$$

Դիտարկում $f_1,\dots f_k: X\to\mathbb{R}^n$ ֆունկցիաները անընդհատ են x_0-ում

$$\Downarrow$$

$\{f_1,\dots f_k\}$ հավասարաստիճան անընդհատ է x_0-ում

Ապացույց $\forall x\in X$ $\{f_\alpha\}$ հավասարաստիճան անընդհատ է

$\varepsilon>0\ \to\ \delta_x>0\quad \sup_{\alpha\in A}\{d(f_\alpha(y),f_\alpha(x)):\ y\in B(x,\delta_x)\}\le\varepsilon/2$

$X\subset\bigcup_{x\in X}B(x,\tfrac12\delta_x)\ \underset{X \text{ կոմպակտ է}}{\Longrightarrow}\ \exists x_1,\dots,x_l\in X\quad X\subset\bigcup_{k=1}^{l}B(x_k,\tfrac{\delta_k}{2})$, $\delta_k = \delta_{x_k}$

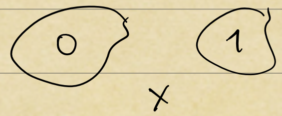
$\delta=\frac12\min\{\delta_1,\dots,\delta_l\}>0$

Ապացուցենք, որ $\forall\alpha\in A$ $\forall y_1,y_2\in X$ $d(y_1,y_2)\le\delta\Rightarrow d(f_\alpha(y_1),f_\alpha(y_2))\le\varepsilon$

$y_1\in B(x_k,\tfrac12\delta_k)\Rightarrow y_2\in B(x_k,\delta_k)\Rightarrow\forall\alpha\in A\quad d(f_\alpha(y_1),f_\alpha(y_2))\le d(f_\alpha(y_1),f_\alpha(x_k))+d(f_\alpha(y_2),f_\alpha(x_k))\le\varepsilon$

$d(y_2,x_k)\le d(y_2,y_1)+d(y_1,x_k)\le\delta+\frac{\delta_k}{2}\le\delta_k$

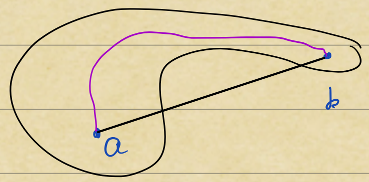
$f \in C([a,b]) \Rightarrow \forall c \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in [a,b] \ f(x) = c$



$X = X_1 \cup X_2$

Սահմանում Կասենք, որ $X \subset \mathbb{R}^m$ բազմությունը (գծայնորեն) կապակցված է եթե $\forall a, b \in X \ \exists \gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ անընդհատ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\gamma(0) = a, \quad \gamma(1) = b, \quad \forall t \in [0,1] \quad \gamma(t) \in X :$$



$\gamma : [0,1] \to X$