Սահման և անընդհատություն

$X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կուտակման կետ X-ի համար

$(\forall \varepsilon > 0 \quad B(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing)$

Սահմանում

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\} \quad |f(x) - A| < \varepsilon$
- $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = A \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^m \quad |x| > R \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$(f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$

$|x| = d(x, 0) = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{1/2}$

Սահմանում $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B \subset X\}$

Կասենք, որ $\mathfrak{B}$-ն <u>հենք</u> է, եթե $\forall B \in \mathfrak{B} \quad B \neq \varnothing$ և $\forall B_1, B_2 \subset \mathfrak{B}$

$\exists B \in \mathfrak{B} \quad B \subset B_1 \cap B_2$

Օրինակներ

1) $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{B(x_0, r) \setminus \{x_0\}, \ r > 0\}$
2) $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B} = \{\{x \in \mathbb{R}^m : 0 < |x_j - x_j^0| < r_j, \ j = 1, \dots m\}, \ r_j > 0\}$
3) $X \subset \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ կուտակման կետ է X-ի համար

   $\mathfrak{B} = \{(B(x_0, r) \cap X) \setminus \{x_0\}, \ r > 0\}$
4) $\mathfrak{B} = \{\{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| > R\}, \ R > 0\} = \{\bar{B}(0, R)^c, \ R > 0\}$

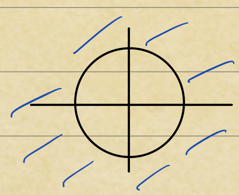
Սահմանում $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{B}$ հենք X-ի վրա

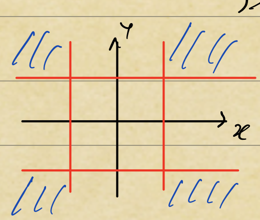
$\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) = \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} \quad f(B) \subset B(A, \varepsilon)$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists B \in \mathfrak{B} \ \forall x \in B \quad \underset{d(x, A)}{\underset{\shortparallel}{|f(x) - A|}} < \varepsilon$

Օրինակ $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y)$ $\quad \mathfrak{B}_1 = \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2)^{1/2} > R\}, \ R > 0\}$

$\mathfrak{B}_2 = \{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > R, \ |y| > R\}, \ R > 0\}$





Սահմանում Կասենք, որ f-ը սահմանափակ է ըստ $\mathcal{B}$ բազայի, եթե

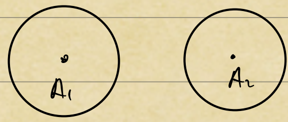
$$\exists C>0 \quad \exists B\in\mathcal{B} \qquad f(B)\subset B(0,C) \Leftrightarrow \forall x\in B \quad |f(x)|<C$$

Թեորեմ ա/ $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f \Rightarrow$ սահմանը միակն է:

բ/ $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f \Rightarrow f$ սահմանափակ է ըստ $\mathcal{B}$-ի:

գ/ $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \quad \exists B\in\mathcal{B} \quad \omega(f,B)<\varepsilon$

Ապացույց ա/ $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_1, \quad \lim\limits_{\mathcal{B}} f = A_2, \qquad A_1, A_2\in\mathbb{R}^n$



$$\varepsilon>0 \qquad B(A_1,\varepsilon)\cap B(A_2,\varepsilon)=\emptyset$$

$$\exists B_1\in\mathcal{B} \qquad f(B_1)\subset B(A_1,\varepsilon) \quad \& \quad \exists B_2\in\mathcal{B} \quad f(B_2)\subset B(A_2,\varepsilon)$$

$$\exists B\in\mathcal{B} \qquad B\subset B_1\cap B_2 \Rightarrow \underset{\emptyset}{\underset{\parallel}{f(B)}} \subset B(A_1,\varepsilon)\cap B(A_2,\varepsilon)=\emptyset$$

գ/ $\Leftarrow$ $\varepsilon=1 \Rightarrow B\in\mathcal{B} \qquad \omega(f,B)<1 \Rightarrow f(B)\subset B(f(x_0),1)$

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{x_1,x_2\in B} |f(x_1)-f(x_2)|<1$$

$$\varepsilon_n=\frac{1}{n} \Rightarrow B_n\in\mathcal{B} \qquad \omega(f,B_n)<\frac{1}{n}, \qquad B_1\supset B_2\supset\ldots$$

$$B_1, \quad B_2'\cap B_1\supset B_2, \quad B_3'\cap B_2=B_3, \ldots$$

$$x_n\in B_n \Rightarrow \forall y\in B_n \quad |f(x_n)-f(y)|<\frac{1}{n} \Rightarrow \forall k\geq n \quad |f(x_n)-f(x_k)|<\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n)=:A$$

Ապացուցենք, որ $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = A$.

$$f(x_n)\to A \quad \& \quad \omega(f,B_n)<\frac{1}{n}$$

Դիցուք $\varepsilon>0$: Այդժամ $n\geq 1$ $\quad |f(x_n)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ & $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall x\in B_n \qquad |f(x)-A| \leq \underbrace{|f(x)-f(x_n)|}_{\omega(f,B_n)<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|f(x_n)-A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

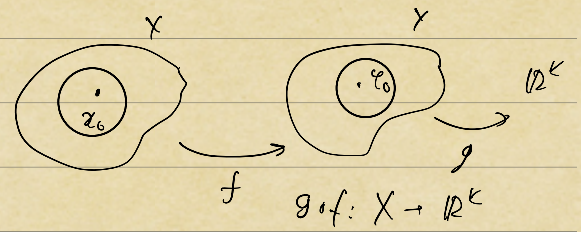
(⇒) $\quad \varepsilon>0 \to B\subset\mathcal{B} \qquad f(B)\subset B(A,\frac{\varepsilon}{2})$

$$\omega(f,B) = \sup_{x_1,x_2\in B} \underbrace{|f(x_1)-f(x_2)|}_{\leq |f(x_1)-A| + |f(x_2)-A| \leq \varepsilon} \leq \varepsilon$$

∎

Թեորեմ Դիցուք տրված են $X\subset\mathbb{R}^m$ և $Y\subset\mathbb{R}^n$ բազմությունները, $\mathcal{B}_1$-ը բազա է X-ի վրա, $\mathcal{B}_2$-ը բազա է Y-ի վրա, $f: X\to Y$, $g: Y\to\mathbb{R}^k$ ֆունկցիաներ են: Ենթադրենք, որ․

- ~~$\exists \lim_{\mathcal{B}_1} f$~~, $\exists \lim_{\mathcal{B}_2} g$
- $\forall B\in\mathcal{B}_2 \ \exists B'\in\mathcal{B}_1 \quad f(B')\subset B$



Այդժամ $\exists \lim_{\mathcal{B}_1} g\circ f = \lim_{\mathcal{B}_2} g$:

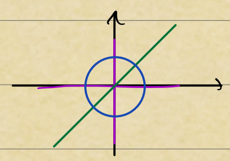
Ապացույց $A := \lim_{\mathcal{B}_2} g \Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists B\in\mathcal{B}_2 \quad g(B)\subset B(A,\varepsilon)$

$\Rightarrow \exists B'\in\mathcal{B}_1 \quad f(B')\subset B$

$\Rightarrow (g\circ f)(B') = g(f(B'))\subset g(B)\subset B(A,\varepsilon)$ ∎

Օրինակներ 1) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ գոյություն չունի



$f(x,0)=0=f(0,y) \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$

$x\neq 0 \Rightarrow f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$

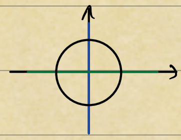
$\forall r>0 \quad \omega(f,B(0,r))\geq\frac{1}{2} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to0}(-1)=-1,\quad \lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f\right)=1$$



$\forall r>0 \quad \omega(f, B(0,r))\geq 2$

3)

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

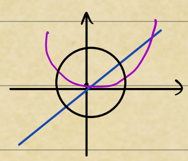
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

$\varepsilon>0;\quad (x,y)\in B(0,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow |f(x,y)|\leq|x|+|y|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$$\lim_{y\to0}\Big(\underbrace{\lim_{x\to0}f(x,y)}_{\text{գոյություն չունի}}\Big)\qquad \lim_{\substack{x\to0\\ y\neq0}}\Big(\underset{0}{x}+\underbrace{y\sin\frac{1}{x}}_{\text{սահման չունի}}\Big)$$

4)

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2},\quad (x,y)\neq(0,0)$$



$x=\alpha t$
$y=\beta t$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$$f(\alpha t,\beta t)=\frac{\alpha^2\beta t^3}{\alpha^4t^4+\beta^2t^2}=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}\to0,\quad t\to0$$

$$\lim_{t\to0}f(\alpha t,\beta t)=0\qquad\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

$$y=x^2\Rightarrow\quad f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},\qquad \omega(f,B(0,r))\geq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$$

Թեորեմ $X\subset\mathbb{R}^m$, $f,g: X\to\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ հենք X-ի վրա: Ենթադրենք, որ $\lim_{\mathcal{B}} f=A$, $\lim_{\mathcal{B}} g=B$: Այդժամ

$$\lim_{\mathcal{B}}(f+cg)=A+cB,\ \ c\in\mathbb{R};\quad \lim_{\mathcal{B}}fg=AB;\quad B\neq0\Rightarrow\lim_{\mathcal{B}}\frac{f}{g}=\frac{A}{B}$$

Սահմանում $X\subset \mathbb{R}^m,\ f: X\to\mathbb{R}^n,\ x_0\in X$ կուտակման կետ է X-ի համար

- Կասենք, որ f-ը անընդհատ է x_0 կետում, եթե

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \iff \forall\varepsilon>0\ \exists r>0\ \forall x\in B(x_0,r)\cap X\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

- $$\omega(f,x_0):=\lim_{\delta\to 0}\omega(f, B(x_0,\delta)\cap X)$$

Թեորեմ ա) f-ը անընդհատ է x_0-ում $\iff \omega(f,x_0)=0$

բ) f-ը անընդհատ է x_0-ում $\Rightarrow f$ սահմանափակ է, երբ $x\to x_0$

գ) f, g անընդհատ են x_0-ում $\Rightarrow f+cg,\ \underbrace{fg,\ \frac{f}{g}\ (g(x_0)\neq 0)}_{n=1}$ անընդհատ են x_0 կետում

դ) $f: X\to Y,\ g: Y\to\mathbb{R}^k,\ x_0\in X,\ f(x_0)=y_0\in Y$, f-ը անընդհատ է x_0-ում, g-ն անընդհատ է y_0-ում $\Rightarrow g\circ f: X\to\mathbb{R}^k$ անընդհատ է x_0-ում։

ե) $f: X\to\mathbb{R}$, f անընդհատ է x_0-ում, $f(x_0)>0 \Rightarrow \exists r>0\ \forall x\in B(x_0,r)\ f(x)\geq\frac{1}{2}f(x_0)>0$։

Ապացույց ա) $(\Rightarrow)$ $\varepsilon>0 \to \exists r>0\quad \forall x\in B(x_0,r)\quad |f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall x_1,x_2\in B(x_0,r)\quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \Rightarrow \omega(f, B(x_0,r))\leq\varepsilon$

$\Rightarrow \underbrace{\lim_{r\to 0}\omega(f, B(x_0,r))}_{\omega(f,x_0)}=0$

$(\Leftarrow)$ $\varepsilon>0,\quad \omega(f,x_0)=0 \Rightarrow \exists\delta>0\quad 0<\omega(f, B(x_0,\delta))-\omega(f,x_0)<\varepsilon$

$\Rightarrow \omega(f, B(x_0,\delta))<\varepsilon \Rightarrow \forall x\in B(x_0,\delta)\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ∎

Օրինակներ 1) $f: X\to\mathbb{R}^n$ անընդհատ է $\left(\overset{def}{\iff}\forall x_0\in X\ f\text{-ը անընդհատ է } x_0\text{-ում}\right)$

$Y\subset X \Rightarrow f|_Y$ անընդհատ է

2) $\pi^j: \mathbb{R}^m\to\mathbb{R},\quad x=(x_1,\ldots x_m)\mapsto x_j$ անընդհատ են

3) $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ $\Rightarrow$ f-ը անընդհատ է $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$-ի վրա և անընդհատ չէ $(0,0)$-ում։