Կոմպակտությունը $\mathbb{R}^m$-ում

$\mathbb{R}^m$, $\quad d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

- $d(x,y)\geq 0;\ d(x,y)=0 \iff x=y$
- $d(x,y)=d(y,x)$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

$G\subset\mathbb{R}^m$ բաց է $\overset{def}{\iff} \forall x\in G\ \exists r>0\quad B(x,r)\subset G$

$F\subset\mathbb{R}^m$ փակ է $\overset{def}{\iff} F^c=\mathbb{R}^m\setminus F$ բաց է

Լեմմ $A\subset\mathbb{R}^m$ փակ է $\iff$ A-ն պարունակում է իր բոլոր կուտակման կետերը:

Սահմանում $K\subset\mathbb{R}^m$ կոմպակտ է $\overset{def}{\iff}$ դիցուք` $K\subset\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$, G_α-ն բաց է $\forall\alpha\in A$: Ապա $\exists\alpha_1,\dots,\alpha_n\in A\quad K\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$:

Թեորեմ Հետևյալ պնդումները համարժեք են $\forall K\subset\mathbb{R}^m$:

ա) K-ն կոմպակտ է:

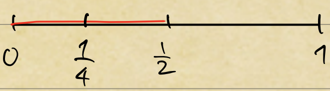
բ) K-ն փակ է և սահմանափակ

գ) $\forall\{x_n\}_{n\geq1}\subset K\quad\exists\, n_j\to+\infty\quad\exists x\in K\quad x_{n_j}\to x$:

Օրինակ 1) $K=[0,1]\subset\mathbb{R}$

K-ն կոմպակտ է

$K\subset\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha$



Եթե K-ն կոմպակտ չէ, ապա կամ $[0,\frac{1}{2}]$-ը, կամ $[\frac{1}{2},1]$ չի ծածկվի վերջավոր թվով G_α բազմություններով.

$K_1=[0,\frac{1}{2}]\supset K_2=[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\supset K_3\supset K_4$, $\qquad |K_j|=2^{-j}\quad\forall j\geq1$

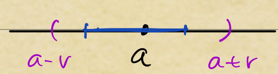
K_j-ն չի ծածկվում վերջավոր թվով G_α-ներով.

$\bigcap_{j=1}^{\infty}K_j=\{a\}$

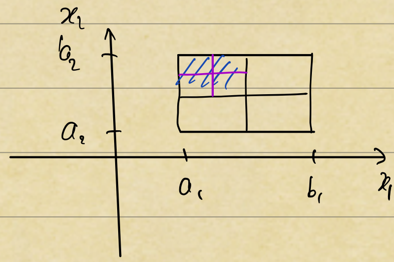
G_α-ն բաց է

$a\in K\Rightarrow\exists\alpha_0\in A\quad a\in G_{\alpha_0}\Rightarrow\exists r>0\quad(a-r,a+r)\subset G_{\alpha_0}$

$j\geq1\quad 2^{-j}<r\qquad\Rightarrow K_j\subset(a-r,a+r)\subset G_{\alpha_0}$



2) $K = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j] = \{ x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : \forall j \in [\![1, m]\!] \quad a_j \le x_j \le b_j \}$



$K_1 \supset K_2 \supset \dots$, $\quad \operatorname{diam}(K_j) \to 0$, $j \to \infty$.

$c \in \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \Rightarrow c \in G_{\alpha_0}$

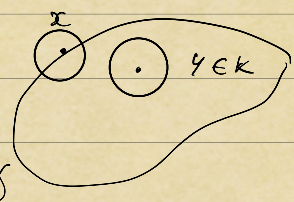
K-ն կոմպակտ է:

Թեոր ա) K-ն կոմպակտ է $\Rightarrow$ K-ն փակ է

բ) K-ն կոմպակտ է, $F \subset K$ փակ է $\Rightarrow$ F-ը կոմպակտ է:

Ապացույց ա) Ենթադրենք, թե K-ն փակ չէ: Այսինքն $\exists x \in \mathbb{R}^m$ K-ի կուտակման կետ, որը չի պատկանում K-ին.

$x \notin K$, $\forall \delta > 0 \ B(x, \delta) \cap K \neq \emptyset$



$\forall y \in K \quad \exists \ \delta_y > 0 \quad B(y, \delta_y) \cap B(x, \delta_y) = \emptyset$

$K \subset \bigcup_{y \in K} B(y, \delta_y) \underset{\text{K-ն կոմպակտ է}}{\Rightarrow} \exists y_1, \dots, y_n \in K \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_{y_i})$

$\delta = \min \delta_{y_i} > 0 \quad \Rightarrow \quad B(y_i, \delta_{y_i}) \cap B(x, \delta) = \emptyset$

$\Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \delta_{y_i}) \right) \cap B(x, \delta) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad K \cap B(x, \delta) = \emptyset$

բ) $\underset{\text{փակ է}}{F} \subset K$, $\quad F \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \qquad K = (K \setminus F) \cup (K \cap F) \subset \underset{\text{բաց է}}{(\mathbb{R}^m \setminus F)} \cup \underset{\text{բաց}}{\left(\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \right)}$

$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A \qquad K \subset (\mathbb{R}^m \setminus F) \cup \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \quad \Rightarrow \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. ∎

Թեորեմի ապացույց ա) $\Rightarrow$ բ)

K-ն կոմպակտ է $\Rightarrow$ K-ն փակ է

$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B(0, n) \Rightarrow \exists n_1, \dots, n_j \in \mathbb{N} \quad K \subset \bigcup_{i=1}^{j} B(0, n_i)$

$\Rightarrow n = \max\{n_1, \dots, n_j\}$, $\quad K \subset B(0, n)$

$\Rightarrow$ K-ն սահմանափակ է:

բ) ⇒ ա) K-ն սահմանափակ է $\Rightarrow \exists R>0 \quad K \subset B(0,R)$

$$B(0,R) \subset \prod_{j=1}^{m} [-R,R] \quad \Rightarrow \quad K \subset \underbrace{\prod_{j=1}^{m} [-R,R]}_{\text{կոմպակտ է}}, \quad K \text{ փակ է}$$

$\Rightarrow$ K-ն կոմպակտ է:

ա), բ) ⇒ գ) $\{x_n\} \subset K \Rightarrow n_j \to +\infty, \ x \in K, \ x_{n_j} \to x$

$$x_n = (x_1^n, \dots, x_m^n), \quad d(x_n, 0) \le C \Rightarrow |x_j^n| \le C \quad \forall n \ge 1 \ \forall j \in [\![1,m]\!]$$

$\Rightarrow \exists n_i \to +\infty \ \forall j \in [\![1,m]\!] \ x_j^{n_i} \to x_j$, երբ $i \to +\infty$:

$$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{m} (x_j^{n_i} - x_j)^2\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \Rightarrow x_{n_i} \to x, \quad i \to +\infty$$

$$\{x_{n_i}\} \subset K, \quad x_{n_i} \to x \underset{\text{K-ն փակ է}}{\Rightarrow} x \in K$$

գ) ⇒ բ) K-ն փակ է

x-ը K-ի կուտակման կետ է $\Rightarrow \{x_n\} \subset K, \ x_n \to x$.

$$\left.\begin{array}{l} \exists n_j \to +\infty \ \exists y \in K \quad x_{n_j} \to y \\ x_{n_j} \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y \in K$$

K-ն սահմանափակ է

$\{x_n\} \subset \mathbb{R}^m$ զուգամետ է $\Rightarrow \{x_n\}$-ը սահմանափակ է

$x_n \to x \Rightarrow \exists N \ge 1 \quad \forall n > N \quad d(x_n, x) \le 1$

$\Rightarrow d(x_n, 0) \le d(x_n, x) + d(x, 0) \le 1 + d(x, 0) \quad \forall n > N$

$R = \max\{d(x_1, 0), \dots, d(x_N, 0), 1 + d(x, 0)\}$

$\forall n \ge 1 \quad d(x_n, 0) \le R \Rightarrow \{x_n\}$-ը սահմանափակ է

Եթե K-ն սահմանափակ չի $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in K \quad d(x_n, 0) \ge n$

$\exists n_j \to +\infty \quad x_{n_j} \to x \quad \Rightarrow \{x_{n_j}\}$-ն սահմանափակ է

$d(x_{n_j}, 0) \ge n_j \quad \forall j \ge 1$

§8. Սահման և անընդհատություն

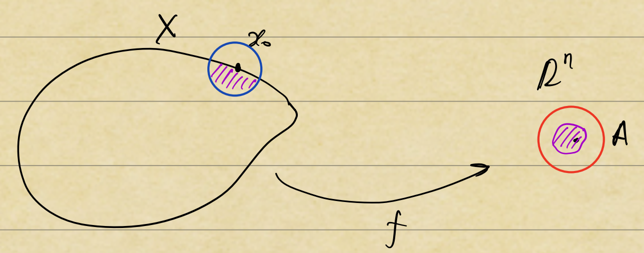
$X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ X-ի կուտակման կետ

Սահմանում • Կասենք, որ $A \in \mathbb{R}^n$ կետը f-ի սահմանն է, երբ $x \to x_0$, եթե $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ x_0-ի V_ε շրջակայք, այնպիսին, որ

$$f\left(X \cap (V_\varepsilon \setminus \{x_0\})\right) \subset B(A, \varepsilon)$$

Նշանակում $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}) \cap X$

$d(f(x), A) < \varepsilon$



• Կասենք, որ f-ը սահմանափակ է, եթե $\exists C > 0 \ \forall x \in X \ d(f(x), 0) \le C$

$\Updownarrow$

$f(X) \subset \mathbb{R}^n$ սահմանափակ է

• Կասենք, որ f-ը սահմանափակ է, երբ $x \to x_0$, եթե $\exists$ x_0-ի այնպիսի V շրջակայք, որ $f((V \setminus \{x_0\}) \cap X)$ սահմանափակ է։

Օրինակներ 1) $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \sin \frac{1}{|x|}$, $x \ne 0$; $|x| = d(x, 0) = \left(\sum\limits_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

2) $f(x) = \operatorname{sgn} \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\operatorname{sgn}(y) = 1$, $y > 0$; $\operatorname{sgn}(-y) = -1$, $y < 0$

$\nexists \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, f-ը սահմանափակ է

3) $f(x) = (|x| + 1) \operatorname{sgn} \frac{1}{x}$, f-ը սահմանափակ չի

f-ը չունի սահման, երբ $x \to 0$

f-ը սահմանափակ է, երբ $x \to 0$

Լեմմ ա) Եթե f-ն ունի սահման, ապա այն միակն է:

բ) Եթե f-ն ունի սահման, երբ $x \to x_0$, ապա f-ը սահմանափակ է, երբ $x \to x_0$:

Ապացույց ա) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A'$

$\exists\, \delta > 0 \quad B(A, \delta) \cap B(A', \delta) = \emptyset$

$\exists$ x_0-ի այնպիսի V_1 շրջակայք, որ $f((V_1 \setminus \{x_0\}) \cap X) \subset B(A, \delta)$

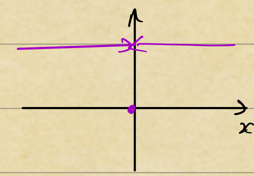
V_2 $\quad f((V_2 \setminus \{x_0\}) \cap X) \subset B(A', \delta)$

$$V = V_1 \cap V_2 = \emptyset \qquad f(\underbrace{(V \setminus \{x_0\}) \cap X}_{\neq \emptyset}) \subset B(A, \delta) \cap B(A', \delta) = \emptyset$$

Թեորեմ $X \subset \mathbb{R}^m$, $f: X \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$ X-ի կուտակման կետ

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \{x_k\} \subset X \setminus \{x_0\}$ $x_k \to x_0$ $\{f(x_k)\}$-ն ունի սահման:

Ապացույց $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$



$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f((B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap X) \subset B(A, \varepsilon)$

$x_k \to x_0 \Rightarrow \exists N \geq 1 \quad \forall k \geq N \quad d(x_k, x_0) < \delta \Rightarrow x_k \in B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \forall k \geq N \quad f(x_k) \in B(A, \varepsilon) \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = A$:

$\Leftarrow$ $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $x_k \in V \setminus \{x_0\}$, $y_k \in V \setminus \{x_0\}$, $x_k \to x_0$, $y_k \to x_0$

$\Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = \lim\limits_{k \to \infty} f(y_k)$

$z_k = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots\}$, $z_k \to x_0 \Rightarrow f(z_k) \to A$, $k \to \infty$

$\Rightarrow f(z_{2k}) \to A$, $f(z_{2k+1}) \to A$

$\Rightarrow f(y_k) \to A$, $f(x_k) \to A$

Նշանակենք A-ով $\{f(x_k)\}$ հաջորդականության սահմանը $(x_k \to x_0)$

[illegible], μη $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq A$: υπάρχει $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in B(x_0, \delta) \cap X$, $x_\delta \neq x_0$

$$d(f(x_\delta), A) > \varepsilon$$

$\delta_k = \frac{1}{k} \to x_k = x_{\delta_k}$, $x_k \neq 0$, $d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, $x_k \in X$

$\Rightarrow x_k \to x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = A$

$\forall k \geq 1 \quad d(f(x_k), A) > \varepsilon$

Ταλάντωση $\quad f : X \to \mathbb{R}^n$, $E \subset X$

$\omega(f, E) = \sup\{ d(f(x), f(y)) : x, y \in E \} = \operatorname{diam}(f(E))$

$\operatorname{diam}\underset{\mathbb{R}^n}{(\underset{\cap}{Y})} = \sup\{ d(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Y \}$

Θεώρημα $\quad f : X \to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in X$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists V \ni x_0$ περιοχή $\ \omega(f, V \setminus \{x_0\}) \leq \varepsilon$