$\mathbb{R}^m$ տարածության տոպոլոգիան

$$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots, x_m) : x_j \in \mathbb{R} \ \forall j \in [\![1, m]\!] \}$$

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

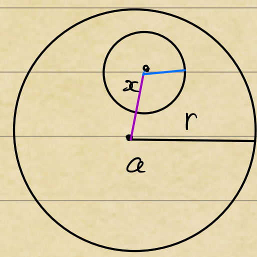
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

$a \in \mathbb{R}^m$, $r > 0$ $\quad B(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^m : d(x,a) < r \}$

$\quad \bar{B}(a,r) = \{ x \in \mathbb{R}^m : d(x,a) \le r \}$

Սահմանում
- $G \subset \mathbb{R}^m$ բաց է $\overset{def}{\iff} \forall a \in G \ \exists r > 0 \quad B(a,r) \subset G$
- $F \subset \mathbb{R}^m$ փակ է $\overset{def}{\iff} F^c := \mathbb{R}^m \setminus F$ բաց է

Օրինակներ 1) $B(a,r)$ բաց է



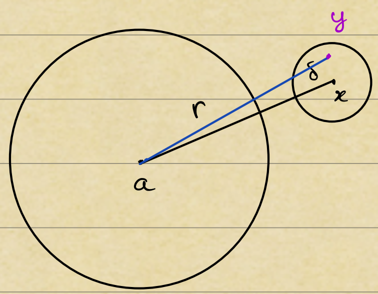
$x \in B(a,r) \Rightarrow \exists \delta > 0 \quad B(x,\delta) \subset B(a,r)$

$\delta < r - d(a,x) \Rightarrow y \in \mathbb{R}^m, \quad d(y,x) < \delta$

$d(y,a) \le d(y,x) + d(x,a) < \delta + d(x,a) < r$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subset B(a,r)$

2) $\bar{B}(a,r)$ փակ է; $\quad \bar{B}(a,r)^c = \{ x \in \mathbb{R}^m : d(x,a) > r \}$



$\delta < d(a,x) - r$

$y \in \mathbb{R}^m, \quad d(y,x) < \delta \Rightarrow d(y,a) \ge d(x,a) - d(y,x)$

$> d(x,a) - \delta > r$

$B(y,\delta) \subset \bar{B}(a,r)^c$

Դիտարկում
- Եռանկյան անհավասարություն $\Rightarrow |d(x,a) - d(y,a)| \le d(x,y)$
- $B(a,r)^c = \{ x \in \mathbb{R}^m : d(x,a) \ge r \}$

Լեմմ

ա) $\{G_\alpha,\ \alpha\in A\}$ բաց բազմություններ են $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ բաց է

բ) $\{F_\alpha,\ \alpha\in A\}$ փակ բազմություններ են $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha\in A} F_\alpha$ փակ է

գ) $G_1,\dots,G_n$ բաց են $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ բաց է

դ) $F_1,\dots,F_n$ փակ են $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ փակ է

Ապացույց ա) $G=\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha,\quad a\in G \Rightarrow \exists \alpha_0\in A \quad a\in G_{\alpha_0}$

$$\underset{G_{\alpha_0}\text{ բաց է}}{\Rightarrow}\quad \exists r>0 \quad B(a,r)\subset G_{\alpha_0} \Rightarrow B(a,r)\subset G$$

գ) $G=\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i,\quad a\in G \Rightarrow \exists r_1,\dots,r_n>0 \quad \forall i\in[\![1,n]\!] \quad B(a,r_i)\subset G_i$

$$\Rightarrow \quad r=\min\{r_1,\dots,r_n\}>0 \quad \forall i\in[\![1,n]\!] \quad B(a,r)\subset G_i$$

$$\Rightarrow \quad B(a,r)\subset G \qquad \blacksquare$$

Օրինակ 1) $m=1,\quad a\in\mathbb{R},\quad B(a,\frac{1}{i}),\ i=1,2,\dots$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B(a,\tfrac{1}{i})=\{a\} \quad \text{բաց չի}$$

2) $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^m:\ d(x,a)=r\}$ փակ է

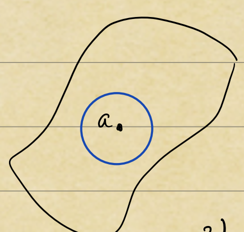
$$S(a,r)^c=\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^m:\ d(x,a)<r\}}_{\text{բաց է}}\cup\underbrace{\{x\in\mathbb{R}^m:\ d(x,a)>r\}}_{\text{բաց է}} \quad \text{բաց է}$$

3) G բաց է, F փակ է $\Rightarrow G\setminus F=\{x\in G:\ x\notin F\}$ բաց

$$G\setminus F=G\cap\underbrace{F^c}_{\text{բաց է}} \quad \text{բաց է}$$

$$F\setminus G=F\cap\underbrace{G^c}_{\text{փակ է}} \quad \text{փակ է}$$

Սահմանում 1) $a\in\mathbb{R}^m$ կետի շրջակայք է կոչվում a-ն պարունակող ցանկացած բաց բազմություն



$G \qquad B(a,\delta)\subset G$

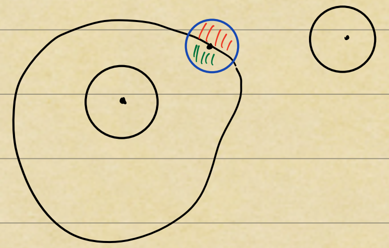
2) $E\subset\mathbb{R}^m,\ x\in E$

$x\in \dot{E} \iff$ • x-ը E-ի ներքին կետ է $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\delta>0 \quad B(x,\delta)\subset E$

• x-ը E-ի արտաքին կետ է $\overset{\text{def}}{\iff}$ x-ը E^c-ի ներքին կետ է

• x-ը E-ի եզրային կետ է $\Leftrightarrow$ x-ը ոչ ներքին կետ է, ոչ արտաքին:

Սահմ x-ը E-ի եզրային կետ է $\Leftrightarrow$ $\forall \delta>0$ $B(x,\delta)\cap E \neq \emptyset$, $B(x,\delta)\cap E^c \neq \emptyset$:



Ապացույց $\Rightarrow$ $\forall \delta>0$ $B(x,\delta)\cap E^c \neq \emptyset$, $B(x,\delta)\cap E \neq \emptyset$

$\Leftarrow$ Եթե x-ը E-ի ներքին կետ է, ապա $\exists r>0$ $B(x,r)\subset E \Rightarrow B(x,r)\cap E^c = \emptyset$ ■

Օրինակներ 1) $B(a,r)$-ի եզրային կետերը $= S(a,r)$, $\bar{B}(a,r)$ եզրային կետերը $= S(a,r)$

2) $a\in \mathbb{R}^m$, a-ն $\{a\}$-ի եզրային կետ է

Սահմանում $E\subset \mathbb{R}^m$

∂ $\partial E = \{x\in \mathbb{R}^m : x$-ը եզրային է E-ի համար$\}$ E-ի եզր

Օրինակ $E\cap \partial E = \emptyset \Rightarrow E$-ն բաց է

$\partial E\subset E \Rightarrow E$-ն փակ է

Սահմանում $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset \mathbb{R}^m$, $x\in \mathbb{R}^m$

$x_n \to x \overset{def}{\Leftrightarrow} d(x_n,x)\to 0$, $n\to\infty$

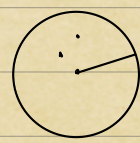
$x\in E \Rightarrow x\notin E^c$, $x\notin \partial E \Rightarrow x$-ը E-ի ներքին կետ է $\Rightarrow E$-ն բաց է

Սահմ Դիցուք $E\subset \mathbb{R}^m$: Ապա $x\in \partial E \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n\geq 1}$ հաջորդականություն E-ից, այնպիսին, որ $x_n\to x$. և x-ը E-ի ներքին կետ չի:

Ապացույց $\Rightarrow$ $\delta_n = \frac{1}{n}$, $B(x,\delta_n)\cap E\neq\emptyset \Rightarrow \exists x_n\in B(x,\delta_n)\cap E$

$\Rightarrow d(x_n,x) < \frac{1}{n}$, $x_n\in E$

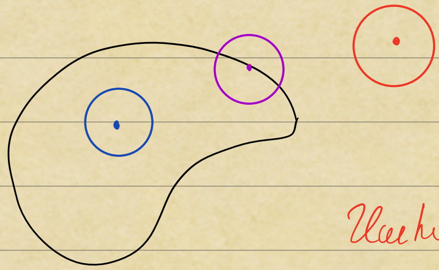
$\Leftarrow$ $x\in E \Rightarrow x_n = x$ $\forall n\geq 1$



$x\notin E \Rightarrow \forall \delta>0$ $B(x,\delta)\cap E\neq\emptyset$, $B(x,\delta)\cap E^c\neq\emptyset$

$x_n\to x \Rightarrow \forall\delta>0$ $\exists N\geq 1$ $d(x_n,x)<\delta$ $\forall n\geq N$

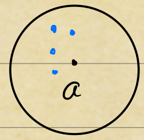
$\Rightarrow x\in\partial E$ ■



$\dot{E}$, ∂E, $(E\cup\partial E)^c$ արտաքին կետերը:

Սահմանում • $E\subset\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^m$

a-ն E-ի կուտակման կետ է $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $\forall\delta>0$ $|B(a,\delta)\cap E|=\infty$



• $E\cup\{$կուտակման կետերը$\} = \bar{E}$ E-ի փակում

Օրինակ 1) $B(a,\delta)\cap S(a,\delta) = \bar{B}(a,\delta)$

2) $S(a,\delta) = S(a,\delta)$

Թեորեմ $F\subset\mathbb{R}^m$ փակ է $\Leftrightarrow$ $\bar{F}=F$ $\Leftrightarrow$ F պարունակում է իր բոլոր կուտակման կետերը

$\Leftrightarrow$ $F\supset\partial F$

Ապացույց • F փակ է $\Rightarrow$ F^c բաց է

$\Rightarrow$ F^c չի պարունակում ոչ մի եզրային կետ

$\Rightarrow$ $\partial F\subset F$

$F\cup\partial F\supset$ F-ի կուտակման կետերը

$x\in\mathbb{R}^m$ կուտակման կետ է $\Rightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset F$, $x_n\to x$

$\Rightarrow$ $\forall\delta>0$ $B(x,\delta)\cap F\neq\emptyset$

Կամ $x\in F$, կամ $x\in F^c$ և $x\in\partial F$

$\bar{F} = F\cup\{$F-ի կուտակման կետերը$\} = F$

• $\bar{F} = F\cup\{$կուտակման կետերը$\} = F$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ F-ը փակ է

Պետք է ցույց տալ, որ F^c բաց է:

$x\in F^c$, $\forall\delta>0$ $B(x,\delta)\cap F\neq\emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists\{x_n\}\subset F$, $x_n\to x$ $\Rightarrow$ x-ը F-ի կուտակման կետ է:

Հետևանք $E\subset\mathbb{R}^m$; $\bar{E}$ = E-ն պարունակող ամենափոքր փակ բազմությունն

$\{F_\alpha, \alpha\in A\}$, $F_\alpha \supset E$, F_α փակ $\Rightarrow$ $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \supset E$ փակ է

Կոմպակտ բազմություններ

Սահմանում $K\subset\mathbb{R}^m$ կոմպակտ է $\Longleftrightarrow$ եթե $K\subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$, $\forall\alpha\in A$ G_α բաց է, ապա $\exists\, \alpha_1,\dots \alpha_n \in A$ $K\subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$:

Թեորեմ Դիցուք $E\subset\mathbb{R}^m$: Հետևյալ պնդումները համարժեք են.

ա) E-ն կոմպակտ է:

բ) E-ն փակ է և սահմանափակ ($\Longleftrightarrow \exists R>0$ $E\subset B(0,R)$):

գ) $\forall \{x_n\}_{n\geq 1}\subset E$ $\exists\, n_j\to+\infty$ $\exists x\in E$ $x_{n_j}\to x$, $j\to+\infty$: