Ընդհանրացված ինտեգրալ

$f:[a,B)\to\mathbb{R},\quad \forall b\in(a,B)\quad f\in R[a,b]$

$$\int_a^B f(x)\,dx := \lim_{b\to B^-}\int_a^b f(x)\,dx$$

- $\exists \int_a^B f(x)\,dx \iff \forall\varepsilon>0\ \ \exists U\ni B$ շրջակայք, այնպիսին, որ $\forall b_1,b_2\in U$

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$$

- $f:(a,B)\to\mathbb{R}$ բացարձակ ինտեգրելի $\overset{\text{def}}{\iff} \int_a^B |f(x)|\,dx<+\infty$

$$\Downarrow$$

$$\exists\int_a^B f(x)\,dx$$

Օրինակներ. 1) $\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx \to \int_a^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx<\infty \iff \alpha>1$

2) $\int^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+x^4}} \sim \int^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}}\,dx<\infty$

3) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \le \int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{x=1}^{x=+\infty} = \frac{1}{e}$

$-x^2<-x$

4) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\ln x} > \int^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx=+\infty$

$\ln x<x,\quad x\gg1$

5) $\int_0^{\pi/2}|\ln(\sin x)|\,dx \sim \int_0 |\ln x|\,dx \le \int_0 x^{-\frac{1}{2}}\,dx<+\infty$

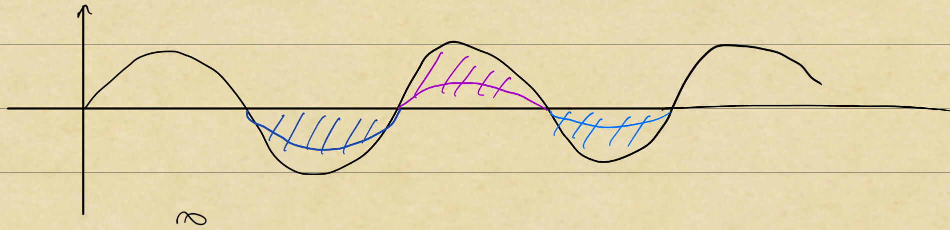
$|\ln x|\le\frac{1}{\sqrt{x}},\quad x\ll1 \iff \underbrace{\left|\ln\frac{1}{y}\right|}_{\ln y}\le\sqrt{y},\quad y\gg1$

$x=\frac{1}{y}$

Պայմանական զուգամիտում

Առաջադրանք Կառուցել, որ $f:[a,B)\to\mathbb{R}$ ֆունկցիայի ինտեգրալը պայմանական զուգամետ է, երբ $\exists\int_a^B f(x)\,dx$ և $\int_a^B|f(x)|\,dx=+\infty$:

Օրինակ $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$



$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n a_{n+1} < 0, \quad |a_1| \geq |a_2| \geq |a_3| \geq \cdots, \quad a_n \to 0 \Rightarrow \exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = +\infty$$

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{b\to+\infty} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{d \cos x}{x} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Big|_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=b} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx \right)$$

$$= \lim_{b\to+\infty} - \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx}_{\text{բացարձակ զուգամետ է}}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{1-\cos 2x}{2x}\, dx$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{1}{x}\, dx}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos 2x}{x}\, dx}_{\text{զուգամետ է}} \to +\infty, \text{ երբ } b \to +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \times (-1)^{[x]}$$

Թեորեմ Դիցուք $f, g: [a, \omega) \to \mathbb{R}$ ֆունկցիաները այնպիսին են, որ $\forall\, b \in (a, \omega)$ $f, g \in R[a,b]$, ընդ որում g-ն մոնոտոն է: Այդ դեպքում fg-ն ինտեգրելի է, եթե.

ա) $\exists \int_a^{\omega} f(x)\, dx$, g-ն սահմանափակ

բ) $\int_a^{x} f(t)\, dt$ ֆունկցիան սահմանափակ է, $g(x) \to 0$, $x \to \omega$

Ապացույց $\displaystyle\int_a^b f(x) g(x)\, dx = g(a) \int_a^{\xi_b} f(x)\, dx + g(b) \int_{\xi_b}^{b} f(x)\, dx$

Պետք է ապացուցել, որ $\int_{b_1}^{b_2} f(x) g(x)\, dx \to 0$, երբ $b_1, b_2 \to \omega$

$a < b_1 < b_2 < \omega \qquad \int_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)\,dx = g(b_1)\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx + g(b_2)\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx \xrightarrow[b_1\to\omega]{} 0$

$$\xi = \xi(b_1, b_2) \in [b_1, b_2]$$

ω) $\quad |g(b_1)| + |g(b_2)| \leq C \qquad \forall\, b_1, b_2$

$$\left|\int_{b_1}^{\xi} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{\xi}^{b_2} f(x)\,dx\right| \to 0, \quad \text{ανν} \quad b_1 \to \omega$$

⇐) $\quad |g(b_1)| + |g(b_2)| \to 0, \quad \text{ανν} \quad b_1, b_2 \to \omega$

$$\left|\int_a^x f(y)\,dy\right| \leq C \;\Rightarrow\; \forall\, c, d \in (a, \omega) \quad \left|\int_c^d f(x)\,dx\right| \leq 2C$$

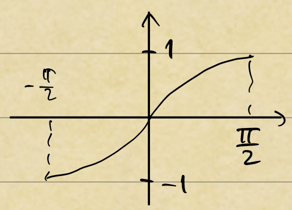
[illegible] $\qquad f: (\omega_1, \omega_2) \to \mathbb{R}, \quad \forall\, [a,b] \subset (\omega_1, \omega_2) \quad f \in R[a,b]; \; c \in (\omega_1, \omega_2)$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx := \int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\omega_2} f(x)\,dx, \qquad c < d$$

$$\int_{\omega_1}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\omega_2} f(x)\,dx = \int_{\omega_1}^{c} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{c}^{d} f(x)\,dx + \int_{d}^{\omega_2} f(x)\,dx}_{\int_c^{\omega_2} f(x)\,dx}$$

[illegible] $\quad$ 1) $\displaystyle \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \arcsin x \Big|_{x=-1}^{x=0} + \arcsin x \Big|_{x=0}^{x=1}$$



$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

2) $\displaystyle \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty$

3) $\displaystyle \int_0^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \underbrace{\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx}_{<+\infty,\ \alpha<1} + \underbrace{\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx}_{<+\infty,\ \alpha>1} = +\infty \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

4) $\displaystyle \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \underbrace{\frac{\sin x}{x^\alpha}}_{\sim x^{1-\alpha}}\,dx + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx}_{\exists,\ \alpha>0} < \infty \iff \begin{cases} \alpha > 0 \\ 1-\alpha > -1 \end{cases} \iff 0 < \alpha < 2$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\quad c\in(a,b)$, $\quad f$-ն անսահմանափակ է c-ի շրջակայքում

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Օրինակ

- $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 4\sqrt{x}\Big|_0^1 = 4$$
- $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x} + \int_0^1\frac{dx}{x}$$

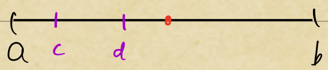
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ տարամետ է; բայց $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left((-1)^{2k-1}+(-1)^{2k}\right)}_{=0}$

Խնդիր Դիցուք $a_n>0$ թվերն այնպիսին են, որ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$, $a_n\to 0$
Ապացուցել, որ $\forall A\in\mathbb{R}$ $\exists\{\varepsilon_n\}_{n\geq 1}$ այնպիսին, որ $\forall n\geq 1$ $\varepsilon_n\in\{-1,1\}$
և $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n}_{1\cdot 1\leq\sum a_n<\infty} = A$:

Սահմանում $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\quad\omega\in(a,b)$; $\quad[c,d]\subset[a,b]\setminus\{\omega\}$ $\quad f\in R[c,d]$

Կոշիի գլխավոր արժեք. $\quad P.V.\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_a^{\omega-\delta}f(x)\,dx + \int_{\omega+\delta}^b f(x)\,dx\right)$

$f\in R[c,d]$



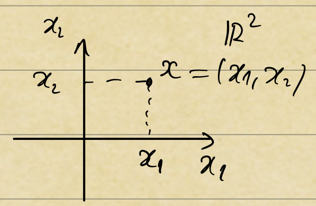
Օրինակ $\quad V.P.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0^+}\underbrace{\left(\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x}+\int_{\delta}^{1}\frac{dx}{x}\right)}_{=0\quad\forall\delta\in(0,1)} = 0$

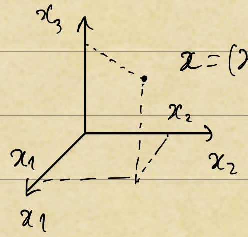
$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty}x\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{R}x\,dx\right) = 0$$

Մաս 2. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվ

§7. $\mathbb{R}^m$ տարածության տոպոլոգիան

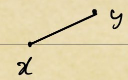
$$\mathbb{R}^m = \{(x_1,\dots,x_m):\ x_j\in\mathbb{R},\ 1\leq j\leq m\} = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{m\text{ անգամ}}$$





$x,y\in\mathbb{R}$ $\quad d(x,y)=|x-y|$

$x,y\in\mathbb{R}$



$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

Սահմանում $\quad x,y\in\mathbb{R}^m, \quad d(x,y)=\left(\sum_{j=1}^{m}(x_j-y_j)^2\right)^{1/2}$

$d:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}_+$

(դեկարտյան)
Դեկարտյան արտադրյալ

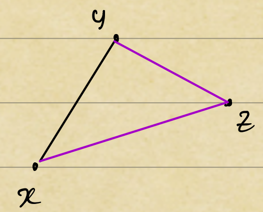
A, B կամայական բազմություններ

$A\times B=\{(a,b): a\in A,\ b\in B\}$

ա) $\quad d(x,y)=0 \iff x=y$

բ) $\quad d(x,y)=d(y,x)$

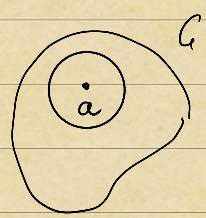
գ) $\quad$ եռանկյան անհավասարություն. $\quad \forall x,y,z\in\mathbb{R}^m \quad d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$



$\forall x,y\in\mathbb{R}^m \quad \forall k\in[\![1,m]\!] \qquad |x_k-y_k|\le d(x,y)\le\sqrt{m}\max\limits_{1\le j\le m}|x_j-y_j|$

Սահմանում

- $B(a,r):=\{x\in\mathbb{R}^m: d(x,a)<r\}$ բաց գունդ
- $G\subset\mathbb{R}^m$ բաց է $\overset{def}{\iff}$ $\forall a\in G\ \exists r>0 \quad B(a,r)\subset G$
- $F\subset\mathbb{R}^m$ փակ է $\overset{def}{\iff}$ $F^c:=\mathbb{R}^m\setminus F$ բաց է:



Օրինակներ $\quad$ ա) $\mathbb{R}^m$ բաց է, $\emptyset$ բաց է $\Rightarrow$ $\mathbb{R}, \emptyset$ փակ են

բ) $\forall a\in\mathbb{R}^m\ \forall r>0 \quad B(a,r)$-ը բաց է

գ) $\quad \overline{B}(a,r):=\{x\in\mathbb{R}^m: d(x,a)\le r\}$ փակ գունդ

$\overline{B}(a,r)$ փակ է

դ) $\quad G=\{x\in\mathbb{R}^m: d(x,a)>r\}$ բաց է

$\not\Rightarrow$ փակ է