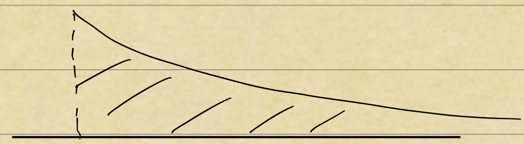
§6. Ընդհանրացված (անիսկական) ինտեգրալ

• $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ • f անսահմանափակ



Սահմանում $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f \in R[a,b] \quad \forall b > a$

Կասենք, որ f-ն ինտեգրելի է, եթե

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx =: \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Օրինակներ 1) $f(x) = e^{-cx}$, $\quad x \geq 0$, $\quad c \neq 0$

$$\int_0^b e^{-cx}\,dx = \frac{e^{-cx}}{-c}\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-cb}\right) \xrightarrow[b\to+\infty]{} \frac{1}{c}, \quad c>0$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx}\,dx = \frac{1}{c} \quad (c>0)$$

2) $f(x) = x^{-\alpha}$, $\quad x \in [1,+\infty)$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\, x^{1-\alpha}\Big|_{x=1}^{x=b} = \frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \to \frac{1}{\alpha-1}, \text{ եթե } b\to+\infty$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}, \quad \boxed{\alpha > 1}$$

Սահմանում • $f: [a, B) \to \mathbb{R} \quad \forall b \in (a,B) \quad f \in R[a,b]$

Կասենք, որ f-ն ինտեգրելի է, եթե

$$\exists \lim_{b\to B^-} \int_a^b f(x)\,dx =: \int_a^B f(x)\,dx$$

• $f: (A, b] \to \mathbb{R}$, $\quad \forall a \in (A,b) \quad f \in R[a,b] \longrightarrow \int_A^b f\,dx := \lim_{a\to A^+} \int_a^b f\,dx$

Օրինակ $f(x)=x^{-\alpha}$, $x\in(0,1]$, $\alpha\in\mathbb{R}$

$\alpha\neq1$: $$\int_a^1 x^{-\alpha}dx=\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{x=a}^{x=1}=\frac{1-a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\to\frac{1}{1-\alpha},\quad 1-\alpha>0\iff\boxed{\alpha<1}$$

$\alpha=1$: $$\int_a^1 x^{-1}dx=\ln x\Big|_a^1=-\ln a\to+\infty,\quad a\to0^+$$

Սահմանում

- $f:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, $\omega>a$ կամ $\omega=+\infty$
  $f:(\omega,b]\to\mathbb{R}$, $\omega<b$ կամ $\omega=-\infty$

- Կասենք, որ f-ն ինտեգրելի է, եթե $\forall b\in(a,\omega)$ $f\in R[a,b]$ և
$$\exists\lim_{b\to\omega^-}\int_a^b f(x)dx=:\int_a^\omega f(x)dx$$

Դիտողություն (a,ω), $\omega<+\infty$, $f\in R[a,b]$ $\forall b\in(a,\omega)$ & $|f|\le C$

Այդ f-ն ինտեգրելի է:

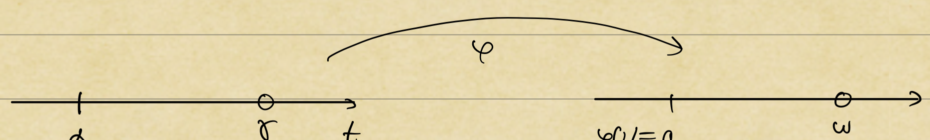
Թեորեմ $f,g:[a,\omega)\to\mathbb{R}$, $\exists\int_a^\omega f dx,\ \int_a^\omega g dx$

ա) $\omega\in\mathbb{R}$, $f\in R[a,\omega]\Rightarrow\int_a^\omega f(x)dx=\lim\limits_{b\to\omega^-}\int_a^b f(x)dx$

բ) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $f+\lambda g$ ինտեգրելի է և
$$\int_a^\omega(f+\lambda g)dx=\int_a^\omega f dx+\lambda\int_a^\omega g dx$$

գ) $\forall c\in(a,\omega)$ $$\int_a^\omega f dx=\int_a^c f dx+\int_c^\omega f dx$$

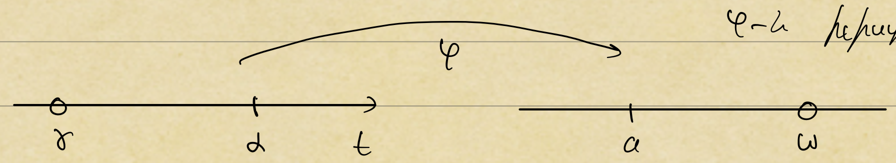
դ) $\varphi:[\alpha,\gamma)\to[a,\omega)$ խիստ աճող է, $\varphi\in C^1([\alpha,\gamma))$, $\varphi(\alpha)=a$ և $\varphi(\beta)\to\omega$, երբ $\beta\to\gamma$:



Այդ $(f\circ\varphi)\varphi'$ ֆունկցիան ինտեգրելի է և $\int_\alpha^\gamma f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int_a^\omega f(x)dx$

Դիտողություն դ) Կմնա ճիշտ է նաև խիստ մոնոտոն ֆունկցիաների համար:

φ-ն խիստ մոնոտոն է, C' դասի



$$\varphi(\alpha)=a, \quad \varphi(\beta)\to\omega, \text{ երբ } \beta\to\gamma^+$$

Ապա
$$\int_a^\omega f(x)\,dx = -\int_\gamma^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Ապացույց ա) $\int_a^x f(t)\,dt$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ x-ի

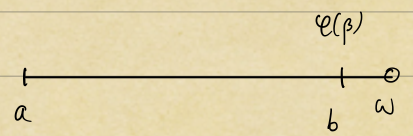
$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)\,dx$$

բ) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Անցնում ենք սահմանի, երբ $b\to\omega$:

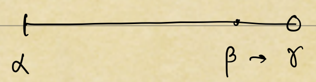
դ) $\varphi:[\alpha,\gamma)\to[a,\omega)$, $\varphi\in C^1([\alpha,\gamma))$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)\to\omega$, երբ $\beta\to\gamma^-$

$$\int_a^\omega f(x)\,dx = \lim_{b\to\omega}\int_a^b f(x)\,dx$$



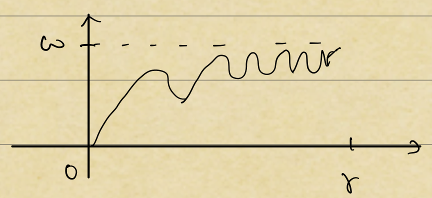
$\varphi^{-1}(\{b\})\subset[\alpha,\gamma)$

$\sup\varphi^{-1}(\{b\})=\beta^+$, $\beta^+<\infty$, $\varphi(\beta^+)=b$



$\beta\to\gamma$, $\varphi(\beta)\to\omega \Rightarrow \varphi(\beta)>b$, երբ $\omega-\beta<\varepsilon$

$\varphi([\alpha,\beta^+])\subset[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta^+)=b$



$[0,\gamma)\to[0,\omega)$

φ-ն խիստ աճող է $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta=\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \xrightarrow[b\to\omega]{}$

$b\to\omega \Rightarrow \varphi^{-1}(b)\to\gamma$

Մասերով ինտեգրում

Դիցուք $f, g \in C^1([a,\omega))$ ֆունկցիաները այնպիսին են, որ

$$\exists \lim_{x\to\omega} f(x)g(x):$$

Այդ $f'g$ և fg' ֆունկցիաները համաժամանակ ինտեգրելի են (չեն) $[a,\omega)$ միջակայքի վրա: Եթե ինտեգրելի են, ապա

$$\int_a^\omega f'(x)g(x)\,dx = \lim_{x\to\omega} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^\omega f(x)g'(x)\,dx$$

Ապացույց
$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \quad \blacksquare$$
$$b\to\omega$$

Օրինակ $f(x) = x^{-\alpha}$

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = -\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{t}\right)^{-\alpha}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int_1^{+\infty} t^{\alpha-2}\,dt$$

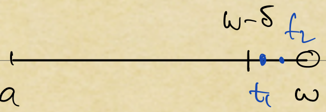
$\uparrow$ $\quad x = \frac{1}{t}$, $x\in(0,1]$, $t\in[1,+\infty)$

$\alpha < 1$ $\qquad\qquad$ $\alpha - 2 < -1 \Rightarrow \alpha < 1$

Ընդհանրացված ինտեգրալների զուգամիտությունը

Թեորեմ Դիցուք $f: [a,\omega) \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան ինտեգրելի լինի ցանկացած $[a,b] \subset [a,\omega)$ միջակայքի վրա: Այդ f-ը ինտեգրելի է այն
(և միայն այն դեպքում, երբ) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ ω-ի շրջակայք, այնպիսին, որ

$$\forall t_1, t_2 \in U,\ t_1 < t_2 \qquad \left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$



$(\omega-\delta, \omega)$

Ապացույց $\exists \lim_{b\to\omega} \int_a^b f(x)\,dx = A$

$$\exists \lim_{b\to\omega^-} F(b) = A \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall b_1, b_2 \in (\omega-\delta,\omega)\ \ |F(b_2) - F(b_1)| < \varepsilon$$

$$F(b_2)-F(b_1)=\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx$$

Սահմանում Կասենք, որ f-ը բացարձակ զուգամետ է, եթե $|f|$-ը զուգամետ է.

$$\int_a^\omega |f|\,dx < +\infty$$

$g \geq 0$ $\quad \int_a^b g(x)\,dx \leq C \quad \forall b \in (a,\omega) \Rightarrow g$-ն զուգամետ է

$\int_a^b g(x)\,dx$ սահմանափակ չի $\Rightarrow g$-ն զուգամետ չի

Հետևանք 1 $\quad \int_a^\omega |f|\,dx < +\infty \Rightarrow f$-ն զուգամետ է

Հետևանք 2 $\quad g \geq 0$: Այդ g զուգամետ է $\Leftrightarrow \sup\limits_{b\in(a,\omega)} \int_a^b g(x)\,dx < \infty$

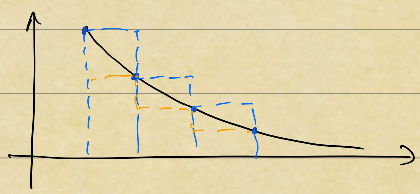
Ապացույց $\quad \left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| \to 0, \quad b_1, b_2 \to \omega$

$\wedge|$

$\int_{b_1}^{b_2} |f(x)|\,dx \to 0, \quad b_1, b_2 \to \omega$ ∎

Օրինակ Դիցուք տրված է $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ նվազող ֆունկցիան։ Այդ

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) < \infty \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$$



$$\int_1^b f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{b-1} f(n)$$

$$\int_1^b f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{b} f(n)$$

$f(n) = n^{-\alpha}$, $\quad \alpha > 1$ $\quad \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha} < \infty \Leftrightarrow \int_1^\infty x^{-\alpha}\,dx < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$

Լեմմ Դիցուք $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in (a,\omega)$: Այդ

$$\int_a^\omega f(x)\,dx \leq \int_a^\omega g(x)\,dx$$

$\int_a^\omega g\,dx < +\infty \Rightarrow \int_a^\omega f\,dx < +\infty$; $\int_a^\omega f\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^\omega g\,dx = +\infty$ ։