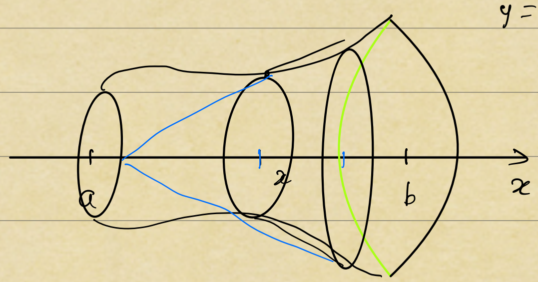
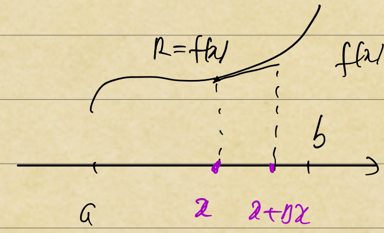
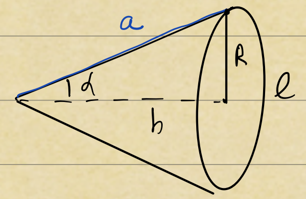
4) Պտտման մակերևույթի մակերես

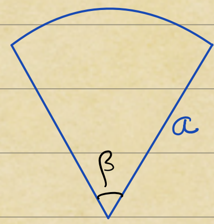
$y = f(x)$





$f(x) + f'(x)\Delta x = R(x+\Delta x)$





$$l = 2\pi R$$
$$R = h \operatorname{tg}\alpha$$
$$l = \beta a$$
$$a = \frac{h}{\cos\alpha}$$

$$2\pi R = \beta a \iff 2\pi h \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\cos\alpha}\beta$$

$$\iff \boxed{\beta = 2\pi \sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2}\beta a^2 = \pi \sin\alpha \frac{h^2}{\cos^2\alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$$

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \pi \sin^{-1}\alpha \left((f(x) + f'(x)\Delta x)^2 - f(x)^2 \right)$$
$$= \frac{\pi}{\sin\alpha}\left(2 f(x) f'(x) \Delta x + O((\Delta x)^2)\right)$$

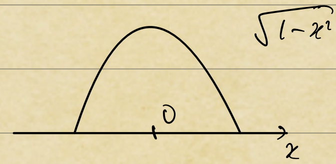
$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$
$$= \frac{2\pi}{\cos\alpha} f(x)\Delta x + O((\Delta x)^2)$$

$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+f'(x)^2}$
$$= 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\Delta x + O((\Delta x)^2)$$

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

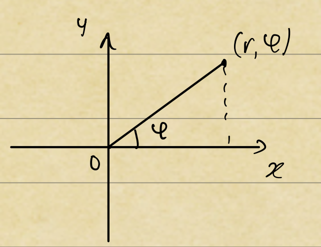
Օրինակ Սֆերայի մակերես

$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$



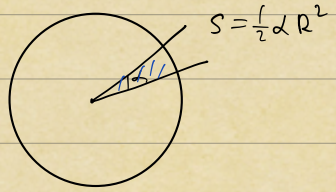
$S(1) = 4\pi R^2$

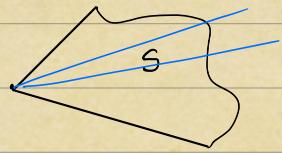
5) Մակերես բևեռային կոորդինատներում

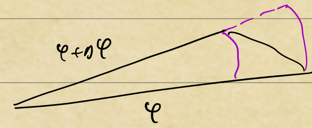


$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$r = f(\varphi), \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2, \quad [\varphi_1, \varphi_2] \subset [0, 2\pi]$$



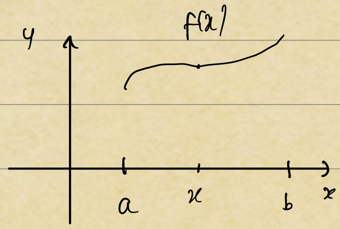




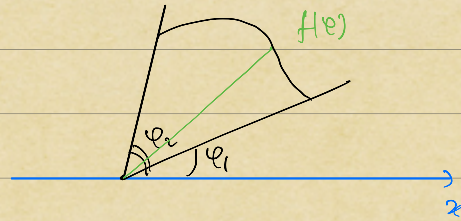
$$S(\varphi, \varphi+\Delta\varphi) \approx \frac{1}{2} f(\varphi)^2 \Delta\varphi$$

$$\boxed{S(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\varphi)^2 \, d\varphi}$$

$y = f(x)$



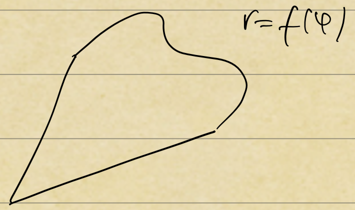
$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \quad f(\varphi) > 0$$

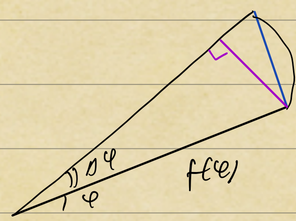


$$y = g(x), \quad \begin{cases} y = r\sin\varphi \\ x = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \boxed{r\sin\varphi = g(r\cos\varphi)} \Rightarrow r = f(\varphi)$$

$r = R$

6) Կորի երկարությունը բևեռային կոորդինատներում





$$l(\varphi, \varphi+\Delta\varphi) = \Big(\big(f(\varphi+\Delta\varphi) - f(\varphi)\cos\Delta\varphi\big)^2 + \big(f(\varphi)\underbrace{\sin\Delta\varphi}_{\Delta\varphi + O((\Delta\varphi)^3)}\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\big(f(\varphi) + f'(\varphi)\Delta\varphi + O((\Delta\varphi)^2) - f(\varphi)(1 + O(\Delta\varphi^2))\big)^2 + \big(f(\varphi)\Delta\varphi + O((\Delta\varphi)^3)\big)^2\Big)^{1/2}$$

$$= \Big[\big(f'(\varphi)\Delta\varphi + O((\Delta\varphi^2))\big)^2 + f^2(\varphi)(\Delta\varphi)^2 + O((\Delta\varphi)^3)\Big]^{1/2}$$

$$= \Big(\big(f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2\big)(\Delta\varphi)^2 + O((\Delta\varphi)^3)\Big)^{1/2}$$

$$= \big(f'(\varphi)^2 + f(\varphi)^2\big)^{\frac{1}{2}}\Delta\varphi + O((\Delta\varphi)^2)$$

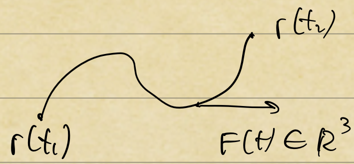
Եզրակացություն. Կորի երկարությունը կարող ենք սահմանել հետևյալ բանաձևով.

$$\boxed{L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2}\, d\varphi}$$

Կիրառությունները ֆիզիկայում

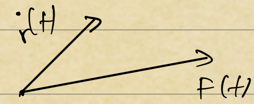
$\dot{P}$ նյութական կետ, m զանգվածով, $r(t)$ կետի հետագիծը

$t \in [t_1, t_2]$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

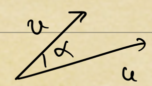


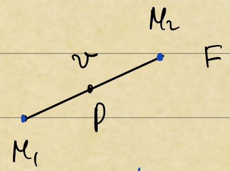
Սահմանում $F(t)$ ուժի աշխատանքը P-ի վրա $\{r(t), t \in [t_1, t_2]\}$ կորի երկայնքով

$$\boxed{W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (F(t), \dot{r}(t))\, dt}$$

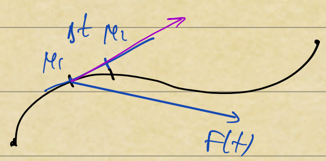


$(u, v) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i$, $(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\alpha$





$W = F \cdot |M_2 M_1|$



$\underbrace{v(t)\Delta t}_{|M_2 M_1|} \cdot F(t)$

Նյուտոնի երկրորդ օրենքը $\quad m\ddot{r} = F$

Թեորեմ P-ի կինետիկ էներգիայի փոփոխությունը հավասար է P-ի վրա գործող բոլոր ուժերի գումարային աշխատանքին հետագծի երկայնքով:

Ապացույց Կինետիկ էներգիա $\frac{1}{2} m |\dot{r}|^2$

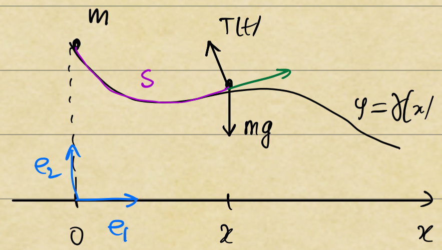
$$m\ddot{r} = F(t) \Rightarrow (m\ddot{r}, \dot{r}) = (F(t), \dot{r}(t))$$

$$r(t) = (x(t), y(t)), \quad \dot{r} = (\dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{r} = (\ddot{x}, \ddot{y})$$

$$(\dot{r}, \ddot{r}) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\dot{r}(t)|^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2} m |\dot{r}(t)|^2 = (F(t), \dot{r}(t)) \Rightarrow \frac{1}{2} m |\dot{r}(t_2)|^2 - \frac{1}{2} m |\dot{r}(t_1)|^2 = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} (F(t), \dot{r}(t))\,dt}_{W(t_1, t_2)} \quad \blacksquare$$

Օրինակներ ա) Գլորվող գնդակ



$$F(t) = T(t) - mg\, e_2$$

$r(t) = (x(t), \gamma(x(t)))$, $s(t)$ գնդակի կորագիծ հեռավորությունը 0 կետից

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \gamma'(y)^2}\, dy$$

կորագիծ հեռավորություն $\qquad s(t) = L(x(t))$

$$|\dot{r}(t)| = \left(\dot{x}(t)^2 + (\gamma'(x(t))\dot{x}(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\dot{x}(t)| \sqrt{1 + \gamma'(x(t))^2}$$

$$|\dot{s}(t)| = \left|\frac{d}{dt} L(x(t))\right| = \sqrt{1 + \gamma'(x(t))^2}\, |\dot{x}(t)|$$

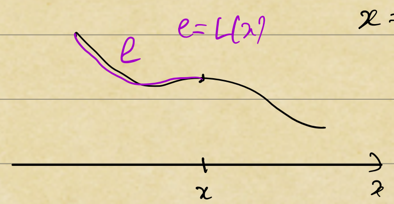
$$\frac{1}{2} m\, \dot{s}(t)^2 - \frac{1}{2} m\, \dot{s}(t_0)^2 = \int_{t_0}^{t} (T(u) - mg\, e_2, \dot{r}(u))\, du$$

$$= -mg \int_{t_0}^{t} \dot{y}(u)\, du = -mg\, y(t) + mg\, y(t_0)$$

$$\dot{s}(t)^2 + 2g\, y(t) = \dot{s}(t_0)^2 + 2g\, y(t_0) = C \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = \gamma(x(t)), \qquad \gamma(x) = \gamma(x(e)) =: h(e)$$

$$x = x(e)$$



Էներգիայի պահպանում. $\dot{s}(t)^2 + 2g\, h(s(t)) \equiv C$:

$$\dot{s}(t) = \sqrt{C - 2g\, h(s(t))}$$

$$\frac{\dot{s}(t)}{\sqrt{C-2gh(s(t))}} = 1 \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\dot{s}(u)\,du}{\sqrt{C-2gh(s(u))}} = \int_{t_0}^{t} du$$

$$s(u) = v \Rightarrow \boxed{\int_{0}^{s(t)} \frac{dv}{\sqrt{C-2gh(v)}} = t} \qquad C = 2g\,h(0)$$

$t_0=0,\ s(0)=0$