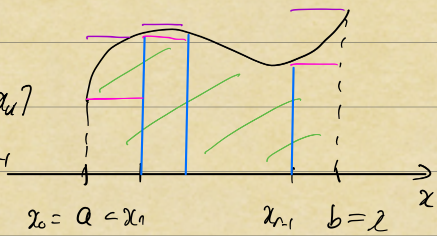
§5. Ինտեգրալի կիրառությունները

1) Կորագիծ սեղանի մակերես

$\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$



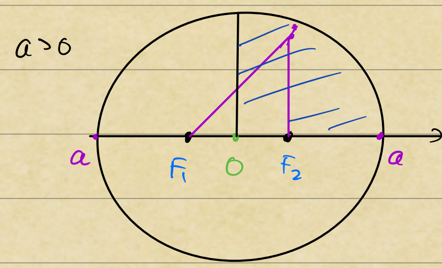
$y = f(x)$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\inf_{\Delta_k} f) \Delta x_k}_{s(f,P)} \leq S \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\sup_{\Delta_k} f) \Delta x_k}_{S(f,P)}$$

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Օրինակ Էլիպսի մակերես

$$a, b > 0 \longrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

$$x = a\sin t \quad = 4 \int_0^{\pi/2} b \sqrt{1 - \sin^2 t}\, a \cos t\, dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\, dt = \pi ab$$

Սահմանում $[a,b]$, $I(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in [a,b]$

I-ն ադիտիվ է $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \alpha, \beta, \gamma \in [a,b] \quad I(\alpha,\beta) + I(\beta,\gamma) = I(\alpha,\gamma)$

Օրինակ $I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, I-ն ադիտիվ է

- $\forall \alpha \in [a,b] \quad I(\alpha,\alpha) = 0$
- $\forall \alpha, \beta \in [a,b] \quad I(\alpha,\beta) = -I(\beta,\alpha)$
- $F(x) = I(a,x) \Rightarrow I(\alpha,\beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

Թեորեմ Դիցուք I ադիտիվ ֆունկցիա և $f \in R[a,b]$ ֆունկցիան այնպիսին են, որ

$\forall (\alpha,\beta) \subset [a,b] \qquad (\inf_{(\alpha,\beta)} f)(\beta - \alpha) \leq I(\alpha,\beta) \leq (\sup_{(\alpha,\beta)} f)(\beta - \alpha)$

Ապա $\forall \alpha, \beta \quad I(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

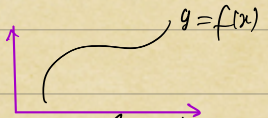
Ապացույց. $[\alpha,\beta] = [a,b]$, $P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\inf_{\Delta_k} f)\, \Delta x_k}_{s(f,P) \to \int_a^b f\,dx} \le I(a,b) = \sum_{k=1}^{n} I(x_{k-1}, x_k) \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (\sup_{\Delta_k} f)\, \Delta x_k}_{S(f,P) \to \int_a^b f\,dx}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P$ $\quad \left| I(a,b) - \int_a^b f\,dx \right| < \varepsilon$ ∎

2) Կորի երկարություն

Սահմանում • $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ կոր է $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ անընդհատ ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\Gamma = \gamma([a,b])$



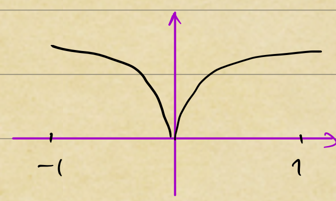
• Կասենք, որ Γ կորը պարզ է, եթե $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b]$ $t_1 \ne t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \ne \gamma(t_2)$

• Կասենք, որ Γ պարզ կորը ողորկ է, եթե $\gamma \in C^k([a,b], \mathbb{R}^3)$ ինչ-որ $k \ge 1$ ամբողջ թվի համար:

Օրինակ $\gamma(t) = (\underset{x}{t^3}, \underset{y}{t^2})$, $t \in [-1,1]$

$$x^2 = y^3 \iff y = x^{2/3}, \quad x \in [-1,1]$$

$$\gamma([-1,1]) \Rightarrow \{(x, x^{2/3}) \mid x \in [-1,1]\}$$



• Կասենք, որ γ կորը պարզ է և փակ, եթե $\gamma(a) = \gamma(b)$ և $\forall\, t_1, t_2 \in [a,b)$ $t_1 \ne t_2 \Rightarrow \gamma(t_1) \ne \gamma(t_2)$

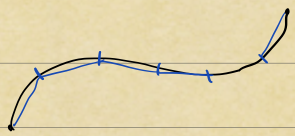
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma \in C^1([a,b])$, $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t))$, $\dot x(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$\ell(\alpha,\beta)$ կետի անցած ճանապարհը $[\alpha,\beta]$ ժամանակահատվածում

$$\left.\begin{array}{l} (\min\limits_{t \in [\alpha,\beta]} |\dot\gamma(t)|)(\beta-\alpha) \le \ell(\alpha,\beta) \le \max\limits_{t \in [\alpha,\beta]} |\dot\gamma(t)| \times (\beta-\alpha) \\ \ell(\alpha,\beta) + \ell(\beta,\gamma) = \ell(\alpha,\gamma) \end{array}\right\} \Rightarrow \ell(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta |\dot\gamma(t)|\, dt$$

Սահմանում $\Gamma=\{\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3\}$ պարզ ողորկ կորի <u>երկարություն</u> կոչվում է հետևյալ քանակությունը.

$$L=\int_a^b\left(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$$



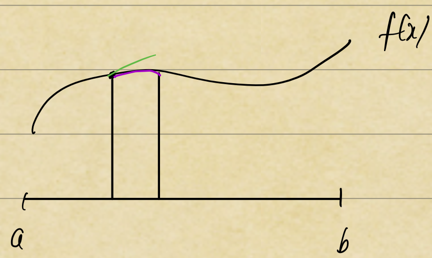
Օրինակներ ա) $\gamma(t)=\left(R\cos(2\pi t),\ R\sin(2\pi t)\right),\quad t\in[0,1]$

$$L=\int_0^1|\dot{\gamma}(t)|\,dt=\int_0^1 2\pi R\underbrace{\left(\sin^2(2\pi t)+\cos^2(2\pi t)\right)^{1/2}}_{=1}dt=2\pi R$$

բ) $\Gamma=\{(x,f(x)):\ x\in[a,b]\},\quad f\in C^1([a,b])$

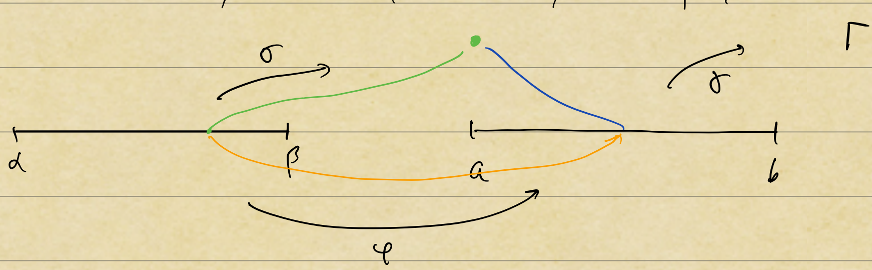
$\gamma(t)=(t,f(t)),\quad t\in[a,b]$

$$L=\int_a^b\left(1+f'(x)^2\right)^{1/2}dx$$



Լեմմ Պարզ ողորկ կորի երկարությունը կախված չէ պարամետրական ներկայացումից:

Ապացույց $\Gamma=\{\gamma(t),\ t\in[a,b]\}=\{\sigma(s),\ s\in[\alpha,\beta]\}$



$\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ փոխմիարժեք, $\quad\sigma(s)=\gamma(\varphi(s))$

$\varphi\in C^1([\alpha,\beta])$

$$L_\sigma=L_\gamma,\quad L_\sigma=\int_\alpha^\beta|\dot{\sigma}(s)|\,ds,\quad L_\gamma=\int_a^b|\dot{\gamma}(t)|\,dt$$

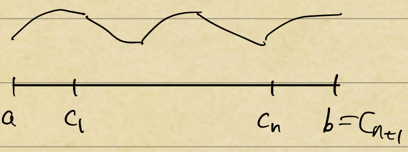
$$L_\gamma\underset{t=\varphi(s)}{=}\int_\alpha^\beta\underbrace{|\dot{\gamma}(\varphi(s))|\,\dot{\varphi}(s)}_{|\dot{\sigma}(s)|}ds,\quad \gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3),\quad \dot{\gamma}(t)=(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t),\gamma_3'(t)),\quad {}'=\frac{d}{dt}$$

$$|\dot{\gamma}(\varphi(s))|\,\dot{\varphi}(s)=\left(\sum_{i=1}^3(\dot{\gamma}_i(\varphi(s)))^2\dot{\varphi}(s)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^3\dot{\sigma}_i(s)^2\right)^{1/2}=|\dot{\sigma}(s)|$$

$$\dot\gamma_i(\varphi(s))\,\dot\varphi(s) = \frac{d}{ds}\gamma_i(\varphi(s)) = \dot\sigma_i(s)$$

Դիտողություն. $\gamma\in C^1([a,b])$

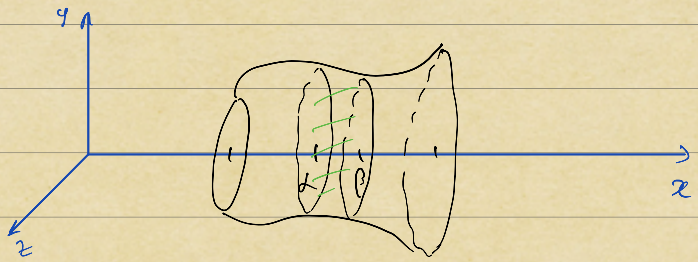
$\gamma\in C([a,b])$

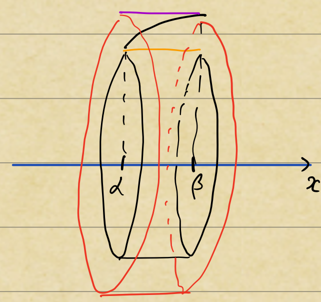


$\gamma|_{[a,c_1]},\ \gamma|_{[c_i,c_{i+1}]},\ \gamma|_{[c_n,b]}\in C^1$

$$L_\gamma=\sum_{k=1}^{n+1}\int_{c_{k-1}}^{c_k}|\dot\gamma(t)|\,dt$$

3) Պտտման մարմնի ծավալը





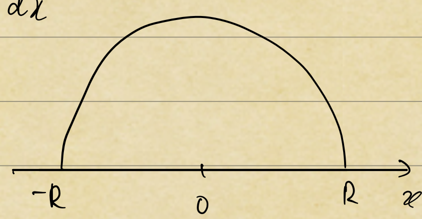
$V(\alpha,\beta)$ ադիտիվ ֆունկցիա է

$$\pi\Big(\inf_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha)\le V(\alpha,\beta)\le \pi\Big(\sup_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\Big)^2(\beta-\alpha)$$

Ամփոփում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի պտտման արդյունքում ստացված մարմնի ծավալը հավասար է

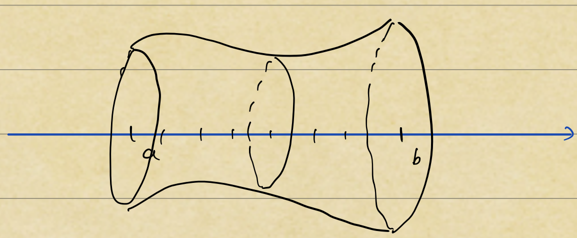
$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

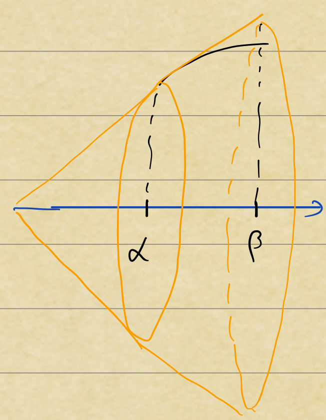
Օրինակ $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$

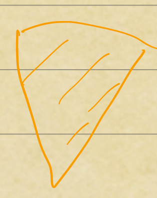


$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)\,dx = 2\pi R^3-2\pi\frac{R^3}{3}$$
$$=\frac{4}{3}\pi R^3$$

4) Պտտման մակերևույթի մակերեսը







$\ell \sim c\,\Delta x \qquad \ell = \sqrt{\Delta x^2 + (\Delta x\, \mathrm{tg}\,\alpha)^2} = \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\,\Delta x = \frac{\Delta x}{\cos\alpha} + O(\Delta x^2$