$\{a_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $a_\alpha \geq 0$ $\quad \sup\limits_{\substack{B\subset A \\ B \text{ վերջավոր}}} \sum\limits_{\alpha\in B} a_\alpha < \infty \Rightarrow \{\alpha\in A : a_\alpha \neq 0\}$ ամենաշատը հաշվելի է

$X \subset \mathbb{R}$

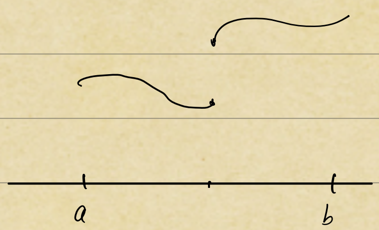
Սահմանում $\quad \mathcal{L}(X)=0 \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists J_1, J_2, \ldots$ $\mathbb{R}$-ի բաց միջակայքեր,

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad \& \quad \sum_{k=1}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$$

Լեմմ $\quad$ Դիցուք $f: (a,b)\to\mathbb{R}$ ածանցելի ֆունկցիա է: Այդ f'-ը չի կարող առաջին սեռի խզում ունենալ.

$g: (a,b)\to\mathbb{R}$, $c\in(a,b)$ անընդհատ չէ

c-ն առաջին սեռի խզման կետ է $\iff \exists \lim\limits_{x\to c^+} g(x) = g(c^+)$, $\exists \lim\limits_{x\to c^-} g(x) = g(c^-)$, $\quad g(c^+) \neq g(c^-)$



$[a,b] = \{x\in\mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

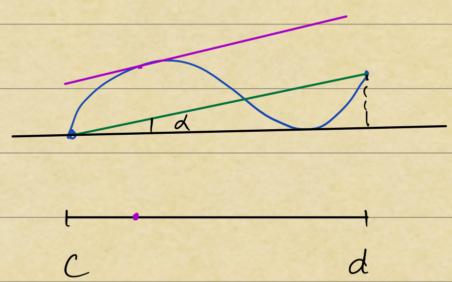
$(a,b) =]a,b[= \{x\in\mathbb{R} : a < x < b\}$

Հիշեցում $\quad$ Միջին արժեքի թեորեմ. $\forall [x_1,x_2]\subset(a,b) \ \exists \xi\in(x_1,x_2)$

$$f(x_2)-f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1)$$

$f\in C([c,d])$, f-ը ածանցելի է բոլոր $x\in(c,d)$ կետերում.

Այդ $\exists \xi\in(c,d) \quad f(d)-f(c) = f'(\xi)(d-c)$



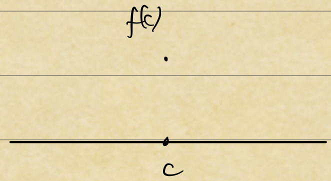
$$f'(\xi) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$$

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c} = \operatorname{tg}\alpha$$

$f(d)=f(c) \Rightarrow \exists \xi\in(c,d) \quad f'(\xi)=0$

- $\forall x\in[c,d] \ f(x)=f(c) \Rightarrow f'(\xi)=0 \ \forall \xi\in(c,d)$
- կամ $\max\limits_{[c,d]} f > f(c)$, կամ $\min\limits_{[c,d]} f < f(c) \Rightarrow$ f-ը ունի ξ էքստրեմում $\Rightarrow f'(\xi)=0$

$$g(x) = f(x) - \left(f(c) + \frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c)\right), \qquad g(c) = g(d) = 0$$



$$[c,x], \quad c < x < b \longrightarrow \xi_x^+$$

$$[x,c], \quad a < x < c \longrightarrow \xi_x^-$$

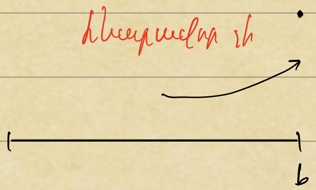
$$A^{\pm} = \lim_{x \to c^{\pm}} f'(x)$$

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi_x^+) \xrightarrow[x>c]{} A^+, \qquad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(\xi_x^-) \xrightarrow[x<c]{} A^-$$

$$A^+ \neq A^-$$

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = A^+ \neq A^- = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

[illegible]



$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{\text{չունի սահման}}$$

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} n\left(f\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Ինտեգրալ և ածանցյալ

Թեորեմ Դիցուք $f \in R[a,b]$, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$: Եթե f-ը անընդհատ է $x_0 \in [a,b]$ կետում, ապա

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Ապացույց

$\underline{h > 0}$

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(x_0) + g(t)\big)\,dt, =$$

որտեղ $g(t) \to 0$, երբ $t \to x_0$:

$$= f(x_0) + \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} g(t)\,dt \to f(x_0), \text{ երբ } h \to 0:$$

$$\lim_{t\to x_0}\varphi(t)=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\in[x_0,x_0+\delta]\quad |\varphi(t)|\le\varepsilon$$

$$\forall h\in(0,\delta]\quad \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varphi(t)dt\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\, dt=\varepsilon$$

Հետևանք 1 Եթե $f\in C((a,b))$, ապա $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ֆունկցիան f-ի նախնականն է.

$$\forall x\in(a,b)\quad F'(x)=f(x)$$

Եթե $\mathcal{F}:(a,b)\to\mathbb{R}$ այնպիսին է, որ $\forall x\in(a,b)$ $\mathcal{F}'(x)=f(x)$, ապա $\exists C\in\mathbb{R}$ $\mathcal{F}=F+C$:

Հետևանք 2 Եթե $\mathcal{F}\in C^1([a,b])$, ապա $\left(f\in C([a,b])\cap C^1((a,b)),\ \exists\lim_{x\to a^+}f'(x),\ \exists\lim_{x\to b^-}f'(x)\right)$

$$\int_a^b \mathcal{F}'(x)dx=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)$$

Ապացույց. $f=\mathcal{F}'$, $F(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow \mathcal{F}=F+C$

$$\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b \mathcal{F}'(x)dx$$

Լեմմ Դիցուք $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ անընդհատ է բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի. $x_1<x_2<\dots<x_n$: Նշանակենք

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt:$$

Այդ $\forall[c,d]\subset[a,b]$ $\quad F(d)-F(c)=\int_c^d f(x)dx$ և

$$\forall x\notin\{x_1,\dots,x_n\}\quad F'(x)=f(x)$$

Օրինակ

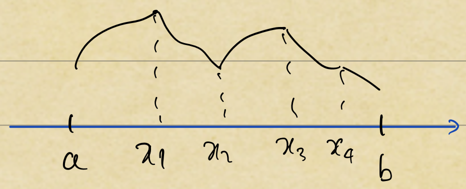
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ 1, & x\in[1,2]\end{cases}$$

$$\int_0^x f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

Հետևանք. Դիցուք $\mathcal{F}\in C([a,b])$, $\mathcal{F}$-ը անընդհատ ածանցելի է, բացառությամբ $x_1<x_2<\dots<x_n$ կետերի, ընդ որում $\forall k\in[\![1,n]\!]$

$$\exists\lim_{x\to x_k^\pm}\mathcal{F}'(x),\quad \mathcal{F}'|_{(x_{k-1},x_k)}\in C((x_{k-1},x_k))$$

$$\mathcal{F}'|_{(x_n,b)}\in C((x_n,b))$$



Ուրեմն $\displaystyle\int_a^b F'(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Ապացուցված. $\displaystyle\int_a^b F'(x)\,dx = \big(F(x_1)-F(a)\big)+\big(F(x_2)-F(x_1)\big)+\dots+\big(F(x_n)-F(x_{n-1})\big)$
$+\big(F(b)-F(x_n)\big)$ ∎

$$\boxed{f\in L(a,b),\quad F(x)=\int_{[a,x]} f(t)\,dt \Rightarrow F\text{-ը աբսոլյուտ անընդհատ է և } F'(x)=f(x) \text{ համարյա բոլոր } x\text{-երի համար:}}$$

Թեորեմ 1 Դիցուք $u,v\in C^1([a,b])$: Այդ
(Մասերով ինտեգրում)

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = \underbrace{uv\Big|_a^b}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

$$\int_a^b v\,\underset{du = u'dx}{du} = uv\Big|_a^b - \int_a^b u\,\underset{v'dx}{dv}$$

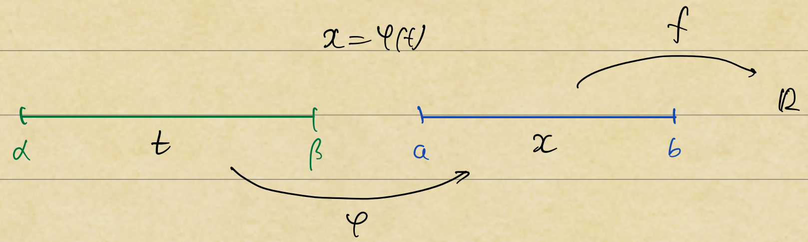
Ապացույց $(uv)' = u'v+uv' \Rightarrow \displaystyle\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$

$$\Rightarrow (uv)(b)-(uv)(a) = \int_a^b u'v\,dx + \int_a^b uv'\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b u'v\,dx = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b uv'\,dx \qquad \blacksquare$$

Թեորեմ 2 (Փոփոխականի փոխարինում)

Դիցուք $f\in C([a,b])$, $\varphi\in C^1([\alpha,\beta])$, $\varphi([\alpha,\beta])\subset[a,b]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$:



Ապա $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \underline{f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt}$ $\qquad \dfrac{d\varphi}{dt}, \quad d\varphi = \varphi'(t)\,dt$

$$x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt$$

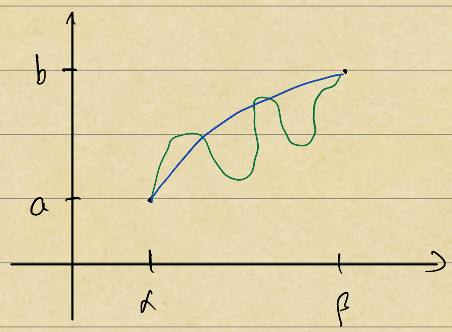
Ապացույց $\quad F(x) = \displaystyle\int_a^x f(y)\,dy \Rightarrow \int_a^b f(y)\,dy = F(b) - F(a)$

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = \underline{f(\varphi(t))\varphi'(t)}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

∎

Թեորեմ 3 $\quad$ Դիցուք $f \in R([a,b])$, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ C^1 դասի խիստ աճող ֆունկցիա է, ընդ որում $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$:



Ապա $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$

- $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$, $\underbrace{\varphi\text{-ն խիստ նվազող է}}^{\varphi(\alpha)=b,\ \varphi(\beta)=a}$, $f \in R[a,b]$:

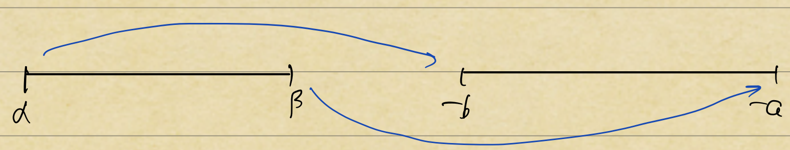
Ապա

$$\int_\alpha^\beta f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\underbrace{\varphi'(t)\,dt}_{dx} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$y = -x$

$g(y) = f(-y)$, $\quad y \in [-b,-a]$, $\quad -\varphi(t)$

$$\varphi(\alpha) = b,\ \varphi(\beta) = a \Rightarrow -\varphi(\alpha) = -b,\ -\varphi(\beta) = -a$$



$$[a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (c_k, d_k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (d_k - c_k) > b - a$$