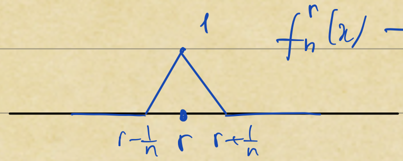
Օրինակ $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$

Խնդիր. Գոյություն ունի՞ արդյոք անընդհատ ֆունկցիաների մի հաջորդականություն, այնպիսին, որ $\forall x \in [a,b]$ $f_n(x) \to D(x)$:

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} f_{m,n}(x), \quad f_{m,n} \in C([a,b])$$

$$D(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{r_k}(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} f_n^{r_k}(x) \right)}_{f_{m,n}(x)}$$

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} = \{r_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \mathbb{1}_r(x) = \begin{cases} 1, & x = r \\ 0, & x \neq r \end{cases}, \quad \mathbb{1}_r(x) = \lim_{n\to\infty} f_n^r(x)$$



$f_n^r(x) \to \mathbb{1}_r(x)$

$$f_n \in C([a,b]), \quad \forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x)$$

$$\varepsilon > 0, \quad \{x \in [0,1] : |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon\} = A_{m,n}^{\varepsilon}$$

$$B_N^{\varepsilon} = \bigcap_{m,n \ge N} A_{m,n}^{\varepsilon}, \quad x \in B_N^{\varepsilon} \Leftrightarrow \forall m,n \ge N \ |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon$$

$$\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) \to f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N^{\varepsilon} = [0,1]$$

Թեորեմ Baire	$[0,1] = \bigcup_{N=1}^{\infty} B_N$, B_N փակ է $\Rightarrow \exists N_0\ \exists [a,b] \subset B_{N_0}$, $a \neq b$

$$x \in [a,b] \quad |f_n(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \quad \forall m,n \ge N_0 \Rightarrow \forall x \in [a,b] \ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

$$\omega(f, [a,b]) \le \omega(f_{N_0}, [a,b]) + 2\varepsilon$$

$$\forall J \subset [a,b] \quad \omega(f, J) \le \omega(f_{N_0}, J) + 2\varepsilon < 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}, \quad \omega(f_{N_0}, J) < \frac{1}{2}$$

Միջին արժեքի թեորեմներ

Թեորեմ $f, g \in R[a,b]$, $g \geq 0 \Rightarrow \exists C \in [m, M]$ $\int_a^b fg\,dx = C\int_a^b g\,dx$

$m = \inf_{[a,b]} f$, $M = \sup_{[a,b]} f$

$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists \xi \in [a,b]$ $\int_a^b fg\,dx = f(\xi)\int_a^b g\,dx$

Աբելի ձևափոխություն
Abel

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{j=0}^{n-1} A_j b_{j+1}$$

$k-1=j$

$A_0 = 0$, $A_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$

$b_{n+1} = 0$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Ենթադրենք, որ $\{b_k\}$ հաջորդականությունը չի աճում

$M = \max_{1\leq k\leq n} A_k$, $m = \min_{1\leq k \leq n} A_k$

$$m b_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = M b_1$$

$\exists c \in [m, M]$ $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = c b_1$

Թեորեմ Դիցուք $f, g \in R[a,b]$, g-ն չի աճում, $g \geq 0$: Այդ $\exists \xi \in [a,b]$

$$\int_a^b fg\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

Ապացույց

P

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)g(x)\,dx = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)[g(x) - g(x_{k-1})]\,dx}_{I(P)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f\,dx}_{II(P)}$$

- $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} I(P) = 0$

$$\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\big(g(x)-g(x_{k-1})\big)\,dx\right| \le \int_{x_{k-1}}^{x_k} \underbrace{|f(x)|}_{\le C} \times \underbrace{|g(x)-g(x_{k-1})|}_{\omega(g,\Delta_k)}\,dx$$

$$\le C\,\omega(g,\Delta_k)\,\Delta x_k$$

$$|I(P)| \le C\sum_{k=1}^{n}\omega(g,\Delta_k)\,\Delta x_k \to 0, \text{ երբ } \lambda(P)\to 0 \text{ ։}$$

- $$II(P) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{g(x_{k-1})}_{b_k} \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx}_{a_k}$$

$$b_1 \min_{1\le k\le n}\int_a^{x_k} f(x)\,dx \le II(P) \le b_1 \max_{1\le k\le n}\int_a^{x_k} f(x)\,dx, \quad F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

$$b_1 \underbrace{\min_{a\le x\le b} F(x)}_{=m} \le II(P) \le b_1 \underbrace{\max_{x\in[a,b]} F(x)}_{=M}$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = I(P) + II(P) \xrightarrow[\lambda(P)\to 0]{} b_1 C, \qquad C\in[m,M]$$

Քանի որ $F\in C([a,b])$, $\exists\, \xi\in[a,b]$ $F(\xi)=C$

$$a\le x<y\le b, \qquad F(y)-F(x) = \int_x^y f(t)\,dt$$

$$|F(y)-F(x)| \le \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\le C}\,dt \le C(y-x) = C|y-x|$$

Թեորեմ. Դիցուք $f,g\in R[a,b]$, g-ն մոնոտոն է։ Այդ $\exists\,\xi\in[a,b]$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^{b} f(x)\,dx \text{ ։}$$

Ապացույց • Դիտարկենք այն դեպքը, որ g-ն աճող է։

Եթե g-ն նվազող է, ապա $(-g)$-ն աճող է։

• g-ή αύξουσα $\uparrow$, $G(x) = g(b) - g(x)$ είναι φθίνουσα, $G \geq 0$

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = G(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\big(g(b)-g(x)\big)\,dx = \big(g(b)-g(a)\big)\int_a^{\xi} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \big(g(a)-g(b)\big)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx$$

$$= g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\,dx \qquad \blacksquare$$

Όμοια $\quad a_1, \dots, a_n \quad \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |a_{k_0}|\Bigg(\underbrace{\overbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq k_0}}^n \left(\frac{|a_k|}{|a_{k_0}|}\right)^p}^{\leq n} + 1}_{\geq 1}\Bigg)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} |a_{k_0}|$

$$\max_{1\leq k\leq n} |a_k| = |a_{k_0}|$$

$$1 \leq (1+\alpha_p)^{1/p} = \exp\Big(\underbrace{\tfrac{1}{p}\ln(1+\alpha_p)}_{\to 0}\Big) \to 1$$

$$\alpha_p \leq n-1$$

Ασκ Έστω $f \in C([a,b])$: Ισχύει

$$A_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \max_{a\leq x\leq b} |f(x)| =: M$$

Ισχυρισμός • $\limsup\limits_{p\to\infty} A_p \leq M$

$$A_p \leq \left(\int_a^b M^p\,dx\right)^{1/p} = M(b-a)^{\frac{1}{p}} \to M$$

• $\exists x_0 \in [a,b] \quad |f(x_0)| = M \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists J \subset [a,b] \quad |f(x)| \geq M - \varepsilon \ \forall x \in J$

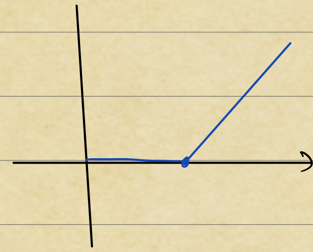
$$A_p \geq \left(\int_J |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \geq \big((M-\varepsilon)^p |J|\big)^{1/p} \to M - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \liminf_{p\to\infty} A_p \geq M - \varepsilon \Rightarrow \liminf_{p\to\infty} A_p \geq M \qquad \blacksquare$$

§4 Ինտեգրում և ածանցում

Օրինակներ 1) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$



$\nexists\ F'(1)$

2) $F(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\end{cases}$, $\quad F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x^2}=0$

$x\neq 0 \to F'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$

Թեորեմ Դիցուք $f\in C([a,b])$, $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$: Ապա

$$\forall x\in[a,b] \quad F'(x)=f(x)$$

Եթե $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ ածանցելի է և $\forall x\in[a,b]$ $G'(x)=f(x)$, ապա

$\exists\, C\in\mathbb{R} \quad G(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$

Հետևանք Դիցուք $F\in C^1([a,b])$: Ապա

$$\int_a^b F'(x)\,dx=F(b)-F(a) \quad \text{(Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձև)}$$

Ապացույց $\mathcal{F}(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, $\quad f=F'\in C([a,b])$

$$\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

$\forall x\in[a,b] \quad \mathcal{F}'(x)=f(x) \Rightarrow F(x)=\mathcal{F}(x)+C$

$\Rightarrow F(b)-F(a)=\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)$ ∎

$f\in R[a,b]$, $\quad \exists \lim\limits_{x\to c^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to c^+}f(x)$, $\quad f(x)=F'(x) \ \forall x\in[a,b]$

$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, $G'(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$, $G'(c^-) = \lim_{x \to c^-} f(x)$

$x < c$, $\int_c^x f(t)\,dt = -\int_x^c f(t)\,dt$