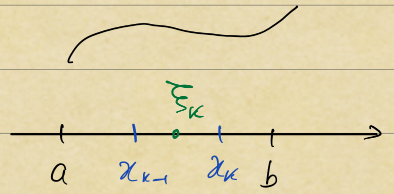
Որոշյալ ինտեգրալը

$$f: [a,b] \to \mathbb{R}$$



$$P = \{ x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$$

$$(P, \xi), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad \xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$$

Ռիմանի գումար. $\displaystyle \sigma(f; P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Սահմանում $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, \xi), \quad \lambda(P) = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k$

– ինտեգրելի ֆունկցիաների բազմություն

Թեորեմ 1. $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists d > 0 \ \forall (P', \xi') \ \forall (P'', \xi'')$

$$\lambda(P'), \lambda(P'') < d \Rightarrow |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| < \varepsilon$$

$$B_d = \{ (P, \xi) : \lambda(P) < d \}; \quad \omega(f, \underset{\cup}{\overset{[a,b]}{\Delta}}) = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta} |f(x_1) - f(x_2)|$$

Թեորեմ 2. $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists d > 0 \ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$, եթե $\lambda(P) < d$:

$\Leftarrow$

Դարբուի գումարներ. $\displaystyle s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (\inf_{\Delta_k} f)\Delta x_k = \inf_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (\sup_{\Delta_k} f)\Delta x_k = \sup_{\xi} \sigma(f, P, \xi)$$

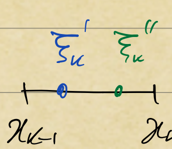
Թեորեմ 3. $f \in \mathcal{R}[a,b] \iff \exists \displaystyle\lim_{\lambda(P)\to 0} s(f, P) = \underline{I}, \ \exists \lim_{\lambda(P)\to 0} S(f, P) = \overline{I},$

$$\underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$S(f, P) - s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} (\underbrace{M_k(f)}_{\sup_{\Delta_k} f} - \underbrace{m_k(f)}_{\inf_{\Delta_k} f})\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$$

Թեորեմ 2-ի ապացույց • $P' = P'' \Rightarrow |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')|$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k') - f(\xi_k''))\Delta x_k \right|$$

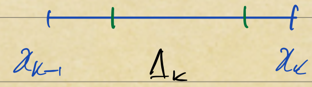


$$\le \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$$

• P''-ը P'-ի մանրացումն է $\iff$ $P' \subset P''$

$x_{k-1} = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{i_k}^k = x_k$ $\quad P''$

P'



$$\left| f(\xi_k')\Delta x_k - \sum_{j=1}^{i_k} f(\xi_j^k)(x_j^k - x_{j-1}^k) \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{i_k} \left(f(\xi_k') - f(\xi_j^k)\right)(x_j^k - x_{j-1}^k) \right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{i_k} \omega(f, \Delta_k)(x_j^k - x_{j-1}^k) = \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$$

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| \le \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$$

• $P', P'' \longrightarrow P = P' \cup P''$ $\quad$ P'-ի, P'' մանրացումն է

$\varepsilon > 0 \longrightarrow \delta > 0 \qquad P, \ \lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$

$$|\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| \le |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P, \xi)| + |\sigma(f, P'', \xi'') - \sigma(f, P, \xi)|$$

$\lambda(P') < \delta, \ \lambda(P'') < \delta$

$$\le \sum_{\Delta_k' \in P'} \omega(f, \Delta_k')\Delta x_k' + \sum_{\Delta_k'' \in P''} \omega(f, \Delta_k'')\Delta x_k''$$

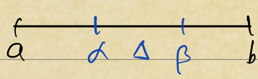
$$\le 2\varepsilon$$

Օրինակներ $\quad$ 1)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\forall [a,b] \qquad f \notin R[a,b]$$

$\forall \Delta = [\alpha, \beta], \ \alpha < \beta \quad \inf_{\Delta} f = 0, \ \sup_{\Delta} f = 1$



$$s(f, P) = 0, \quad S(f, P) = b - a \Rightarrow f \notin R[a,b]$$

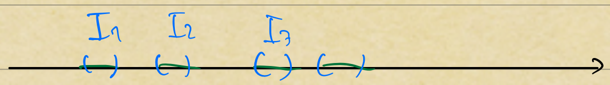
2) Ռիմանի ֆունկցիա

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \ n \in \mathbb{N}, \ m \wedge n = 1, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Լուծ. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ կետում R-ը անընդհատ է և $\forall x \in \mathbb{Q}$ կետում R-ը խզվում է

Սահմանում Կասենք, որ $A\subset\mathbb{R}$ բազմությունը <u>զրո չափի է</u>, եթե $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ բաց միջակայքեր $I_1, I_2, \ldots$, այնպիսիք, որ

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty}|I_j|\leq\varepsilon$$



Օրինակներ 1) A վերջավոր է $\Rightarrow$ A զրո չափի է $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{L}(A)=0$

$$A=\{a_1, a_2, \ldots a_n\};\ \varepsilon>0,\quad I_j=\left(a_j-\frac{\varepsilon}{2n}, a_j+\frac{\varepsilon}{2n}\right)\ni a_j$$

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{n} I_j, \quad \sum_{j=1}^{n}|I_j| = n\times\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon$$

2) A հաշվելի է $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(A)=0$

$$A=\{a_j, j\in\mathbb{N}\},\quad I_j=\left(a_j-\varepsilon\cdot 2^{-j-1}, a_j+\varepsilon\cdot 2^{-j-1}\right)\ni a_j$$

$$A\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty}|I_j| = \sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon\times 2^{-j}=\varepsilon$$

3) $A_1, A_2, \ldots \subset\mathbb{R}$, $\forall j\in\mathbb{N}$ $\mathcal{L}(A_j)=0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j\right)=0$

4) $B\subset A$, $\mathcal{L}(A)=0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(B)=0$

5) $\forall\ a<b$ $\quad\mathcal{L}([a,b])\neq 0$

$$[a,b]=\bigcup_{x\in[a,b]}\{x\}$$

Լեմմ $[a,b]\subset\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $I_j=(\alpha_j, \beta_j)$ $\Rightarrow$ $\sum_{j=1}^{\infty}|I_j|>b-a$

Հիշեցում $K\subset\mathbb{R}$ կոմպակտ է $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ K փակ է և սահմանափակ

$\Longleftrightarrow$ $K\subset\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}G_\alpha \Rightarrow \exists\alpha_1,\ldots\alpha_n\in\mathcal{A}$ $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}G_{\alpha_i}$:

Բանի որ $[a,b]$-ն կոմպակտ է, $\exists\, n \geq 1 \quad [a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{n} I_j$:

Ցույց տանք, որ $\sum_{j=1}^{n} |I_j| > b-a$:

$n=1 \qquad [a,b] \subset (\alpha,\beta) \Rightarrow \alpha < a,\ \beta > b \Rightarrow \beta - \alpha > b-a$

$n=k \qquad$ ճիշտ է

$n=k+1 \qquad [a,b] \subset \bigcup_{j=1}^{k+1} I_j ; \quad a \in I_1 = (\alpha_1, \beta_1) ; \quad \beta_1 > b, \ \alpha_1 < a \Rightarrow \beta_1 - \alpha_1 > b-a$

$\beta_1 \leq b \qquad [\beta_1, b] \subset \bigcup_{j=2}^{k+1} I_j \Rightarrow \sum_{j=2}^{k+1} |I_j| > b - \beta_1$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k+1} |I_j| > (b-\beta_1) + (\beta_1 - \alpha_1) = b - \alpha_1 > b-a \ \blacksquare$$

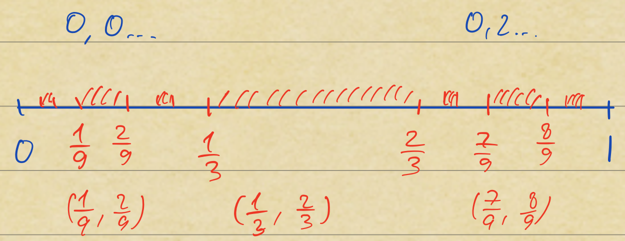
Թեորեմ (Լեբեգի հայտանիշ)

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան ինտեգրելի $\Leftrightarrow$ f-ը սահմանափակ է և $\exists\, A \subset [a,b] \quad \mathcal{L}(A) = 0, \ \forall x \in [a,b] \setminus A$ f-ը անընդհատ է x կետում:

Օրինակ $\qquad R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n},\ n \in \mathbb{N},\ m \wedge n = 1 \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ կետում R-ը անընդհատ է $\underset{\text{Լեբեգ}}{\Rightarrow} R \in \mathcal{R}[0,1]$

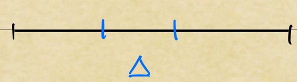
Կանտորի բազմություն.



$\mathcal{C} = \{0, a_1 a_2 a_3 \ldots : a_i \in \{0,2\}\}, \quad \operatorname{card}(\mathcal{C}) = 2^{\mathbb{N}}$

$R \in \mathcal{R}[0,1] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \quad \lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon$

$\Delta \subset [0,1], \qquad N(\Delta) = \min\{n : \frac{m}{n} \in \Delta\}$



$$\omega(R, \Delta) = \frac{1}{N(\Delta)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}{}' \ \omega(f, \Delta_k)\, \Delta x_k = \sum_{k:\ N(\Delta_k) \geq N_0}{}' \ + \sum_{k:\ N(\Delta_k) < N_0} \ = \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I} \leq \sum_{k:\ N(\Delta_k) \geq N_0} \frac{1}{N_0}\, \Delta x_k = \frac{1}{N_0} \ \times (b-a)$$

$$\mathrm{II} \leq \sum_{k:\ N(\Delta_k) < N_0} 1 \times d = d \times \operatorname{card}\{ k \in [\![1, n]\!] : N(\Delta_k) \leq N_0 - 1 \}$$

$$n \in [\![1, N_0 - 1]\!] \to \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \longrightarrow n+1$$

$$\operatorname{card}\left\{ \frac{m}{n} \in [0,1] \mid n \in [\![1, N_0 - 1]\!] \right\} = \sum_{n=1}^{N_0 - 1} (n+1) = \frac{2 + N_0}{2}(N_0 - 1) \leq C N_0^2$$

$$\mathrm{II} \leq C N_0^2 d$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \leq \frac{1}{N_0} + C N_0^2 d < \varepsilon \Leftarrow N_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1, \quad d < \frac{\varepsilon}{2 C N_0^2}$$

$$\frac{1}{N_0} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad C N_0^2 d < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \to 0} \omega(f, (x-\delta, x+\delta))$$

f-ը անընդհատ է x կետում $\Leftrightarrow$ $\omega(f, x) = 0$

Երկու ստուգողական. 14/03, 22/04 ; Եզրափակիչ քննություն. 23-31/05

2 ժամ 3 ժամ 5 ժամ

$$q = \frac{1}{6}(Q1) + \frac{1}{3}(Q2) + \frac{1}{2}(Q3) \in [0, 20]$$

+2 +2

$$f \underset{\mathcal{B}}{=} O(q) \Rightarrow \exists C > 0 \ \exists B \in \mathcal{B} \ \forall x \in B \ |f(x)| \leq C\, |q(x)|$$