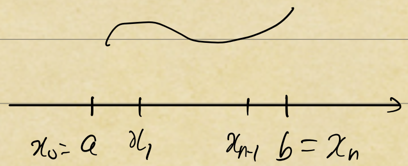
Ռիմանի ինտեգրալ



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$P = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$, $\lambda(P) = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$

(P, ξ), $\xi_k \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$

Ռիմանի գումար. $\sigma(f, P, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Սահմանում $f \in R[a,b]$ ($\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ f-ը ինտեգրելի ըստ Ռիմանի)

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\exists \lim_{\lambda(P) \to 0} \sigma(f, P, \xi) =: \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow \text{def}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (P, \xi) \qquad \lambda(P) < \delta \Rightarrow \left| \int_a^b f dx - \sigma(f, P, \xi) \right| < \varepsilon$$

$$B_\delta = \{ (P, \xi) : \lambda(P) < \delta \}$$

Թեորեմ $f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (P', \xi'), (P'', \xi'') \in B_\delta$

$$| \sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'') | < \varepsilon$$

Օրինակ $F(y)$, $y \in \mathbb{R}$

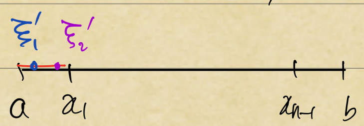
$$A = \lim_{y \to +\infty} F(y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists y_\varepsilon > 0 \ \forall y > y_\varepsilon \ |F(y) - A| < \varepsilon$$

$$\exists \lim_{y \to +\infty} F(y) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists y_\varepsilon > 0 \ \forall y_1, y_2 > y_\varepsilon \ |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$$

Լեմմ $f \in R[a,b] \Rightarrow \exists C > 0 \ \forall x \in [a,b] \ |f(x)| < C$

Ապացույց $\exists \delta > 0 \ \forall P', P'' \in B_\delta \ | \sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'') | < 1$

$P' = P'' = P$, ξ', ξ''



Ենթադրենք, թե f անսահմանափակ է

f-ը անսահմանափակ է $[x_0, x_1]$-ի վրա:

$\xi_k' = \xi_k'' \quad \forall k \in [\![2, n]\!]$

$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = |f(\xi_1') - f(\xi_1'')|\, \Delta x_1 < 1$$

$$|f(\xi_1') - f(\xi_1'')| \le \frac{1}{\Delta x_1} \Rightarrow$$ f-ը անսահմանափակ է Δ_1-ի վրա: ∎

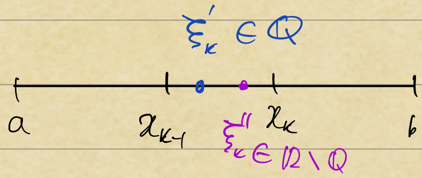
$$\sigma(f, P, \xi') = f(\xi_1')\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n')\Delta x_n, \quad \sigma(f, P, \xi'') = f(\xi_1'')\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n'')\Delta x_n$$

Օրինակ 1)
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad f: [a,b] \to \mathbb{R}$$

$f \notin R[a,b]$

$\varepsilon = \frac{b-a}{2} \longrightarrow \delta > 0 \quad \forall (P', \xi'), (P'', \xi'') \in B_\delta \quad |\sigma(f, P', \xi') - \sigma(f, P'', \xi'')| < \frac{b-a}{2}$

$P' = P'' = P,$



$$\sigma(f, P, \xi') = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f(\xi_k')}_{=1} \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$$

$$\sigma(f, P, \xi'') = 0$$

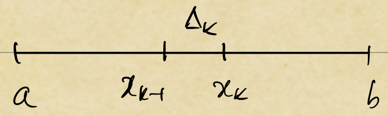
$$|\sigma(f, P, \xi') - \sigma(f, P, \xi'')| = b - a < \frac{1}{2}(b-a)$$

2) $f(x) = C \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow \sigma(f, P, \xi) = C(b-a)$

Սահմանում $\quad f: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad X \subset [a,b]$

$$\omega(f, X) := \sup_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|$$ f-ի տատանումը X-ի վրա

Թեորեմ Դիցուք $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ սահմանափակ ֆունկցիան այնպիսին է, որ
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P \quad \lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$
Ապա $f \in R[a,b]$:



$\omega(f,\Delta_k) = \cancel{\max_{\Delta_k} f - \min_{\Delta_k} f} = \sup_{\Delta_k} f - \inf_{\Delta_k} f$

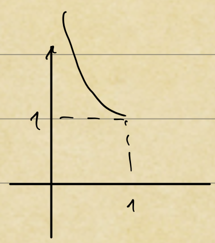
Թեորեմ ա) $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in R[a,b]$

բ) Եթե f-ը սահմանափակ է անընդհատ՝ բացառությամբ վերջավոր թվով կետերի, ապա $f \in R[a,b]$:

գ) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ մոնոտոն է $\Rightarrow f \in R[a,b]$:

Ապացույց ա) $f \in C([a,b]) \Rightarrow f$-ը հավասարաչափ անընդհատ է

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x_1,x_2 \in [a,b] \quad |x_1-x_2|<\delta \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

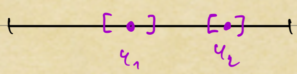


$f_1(x)=\frac{1}{x}, \quad f_2(x)=\sin\frac{1}{x}, \quad x\in(0,1)$

$\lambda(P)<\delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\omega(f,\Delta_k)}_{\leq\varepsilon} \Delta x_k \leq \varepsilon(b-a)$

$\varepsilon \to \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad d=\delta$

բ) N f-ի խզման կետերի թիվը



$[a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{N} (y_i-d, y_i+d) = X_d$

$f: X_d \to \mathbb{R}$ հավասարաչափ անընդհատ է

$\sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k = \sum_{k:\,\Delta_k \not\ni y_i} + \sum_{k:\,\Delta_k \ni y_i} = \mathrm{I} + \mathrm{II} < \varepsilon$

$\mathrm{II} \leq C \times 2N \times d < \frac{\varepsilon}{2} \qquad C=\omega(f,[a,b])$

$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}, \quad f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$\sin\frac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$

$f:(0,1] \to \mathbb{R}$ неравномерно непрекидна $\iff \exists\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, (x_n), (y_n)$

- $|x_n - y_n| \to 0$, када $n \to \infty$
- $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \quad \forall n \geq 1$

$\sin\frac{1}{x_n} = 1, \quad \sin\frac{1}{y_n} = -1 \Leftarrow x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}, \quad y_n = \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$

$x_n - y_n \to 0, \quad f(x_n) = 1, \quad f(y_n) = -1$

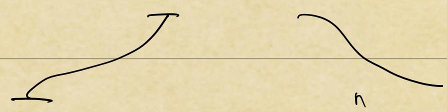
$d < \frac{\varepsilon}{4CN}$

$\alpha = d \to \delta, \quad \omega(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad |\Delta| < \delta$

$I \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$d = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4CN}, \delta\right\}$

9) f монотона, $[c,d] \subset [a,b]$, $\omega(f,[c,d]) = |f(d) - f(c)|$



$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \underbrace{\Delta x_k}_{\leq d}$$

$$\leq d \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\right|}_{f(b) - f(a)} = d\,|f(b) - f(a)|$$

$\varepsilon > 0 \to d = \frac{\varepsilon}{|f(b) - f(a)|}$

$f \in R[a,b] \iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists d > 0 \;\; \forall P$

$\lambda(P) < d \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \overbrace{(M_k - m_k)}^{\omega(f,\Delta_k)} \Delta x_k < \varepsilon$

при чему $M_k = \sup_{\Delta_k} f, \quad m_k = \inf_{\Delta_k} f$

Ամփոփում Դարբուի գումարներ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, P

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

- $\forall (P,\xi)$ $\quad s(f,P) \le \sigma(f,P,\xi) \le S(f,P)$

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad m_k \le f(\xi_k) \le M_k$$

- $s(f,P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,P,\xi), \quad S(f,P) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f,P,\xi)$

$$\sigma(f,P,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \longrightarrow \sum M_k \Delta x_k$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

Թեորեմ Դիցուք տրված է $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ սահմանափակ ֆունկցիան:

Այդ $\quad f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s(f,P) =: \underline{I}, \ \exists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S(f,P) =: \overline{I}, \ \underline{I} = \overline{I}$

Օրինակ $a_n, b_n, \quad a_n \to A, \ b_n \to A \Rightarrow \forall c_n, \ a_n \le c_n \le b_n, \ c_n \to A$

Թեորեմ Դիցուք $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Այդ

$$f \in R[a,b] \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall P \quad \lambda(P) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$$