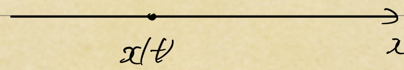
§2. Определенный интеграл

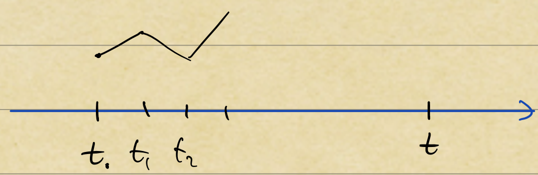
Определение. 1)



$$\dot{x}(t) = \lim_{s\to t} \frac{x(s)-x(t)}{s-t} = v(t)$$

Знаем $v(t)$, найти функцию $x(t)$:

$$v(t) \equiv v_0, \quad x(t_0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t$$



$$x(t_0) = x_0$$

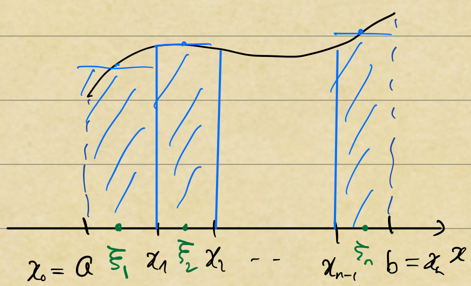
$$t_k = t_0 + \frac{t-t_0}{n}k$$

$$[t_{k-1}, t_k], \quad v(t_{k-1})$$

$$x(t) \cong x_0 + \sum_{k=1}^{n} v(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})$$

$$x(t) = x_0 + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_{k-1}^{(n)})(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)})$$

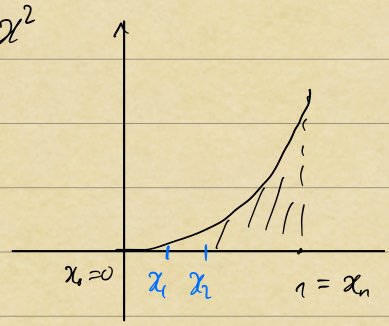
2)



$$S \simeq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$$S = \lim_{\substack{\max(\Delta x_k)\to 0\\ 1\le k\le n}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$f(x) = x^2$



$$x_k = \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n, \quad \xi_k = x_k$$

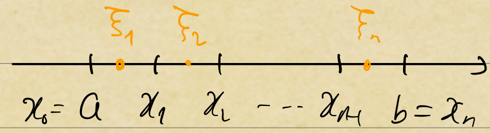
$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 (x_k - x_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

Սահմանում • $[a,b]$-ի P <u>տրոհում</u>. $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$



$P = \{x_0, \dots, x_n\}$

• $[a,b]$-ի (P, ξ) <u>տրոհում նշագծված կետերով</u>. P, $\forall k \in [1,n]$ $\xi_k \in \Delta_k$, $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$

• P կամ (P,ξ) <u>տրոհման պարամետր</u>. $\lambda(P) = \max\limits_{1 \le k \le n} |\Delta_k| = \max\limits_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$

• <u>Ռիմանի գումար</u> $\sigma(f; P, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$:

Սահմանում Կասենք, որ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ֆունկցիան <u>ինտեգրելի</u> է, եթե գոյություն ունի այնպիսի $I \in \mathbb{R}$ թիվ, որ

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists d > 0 \quad \forall (P,\xi) \qquad \lambda(P) < d \Rightarrow |\sigma(f, P, \xi) - I| < \varepsilon$$

Նշանակումներ • $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

• a ներքին սահման, b վերին սահման, f ինտեգրանդը, x ինտեգրման փոփոխական

• $R[a,b] = \{$ ինտեգրելի ֆունկցիաներ $\}$

Օրինակներ 1) $\{a_n\}_{n \ge 1}$, $A = \lim\limits_{n \to \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \ge 1 \quad \forall n \ge N_\varepsilon \quad |a_n - A| < \varepsilon$

• $\exists \lim\limits_{n \to \infty} a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \ge 1 \quad \forall m, n \ge N_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$

2) $f(x)$, a; $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \quad |f(x) - A| < \varepsilon$

• $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall x_1,x_2 \in (a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

Թեոր 1 $\quad f\in R[a,b] \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists d>0 \ \forall (P',\xi'),(P'',\xi'')$

$$\lambda(P')<d,\ \lambda(P'')<d \Rightarrow |\sigma(f,P',\xi')-\sigma(f,P'',\xi'')|<\varepsilon$$

Սահմանում $\quad X$ բազմություն, $\mathcal{B}$ X-ի ոչ դատարկ ենթաբազմությունների ընտանիք

Կասենք, որ $\mathcal{B}$-ն հենք է, եթե $\forall B_1,B_2\in\mathcal{B} \ \exists B\in\mathcal{B} \ \ B\subset B_1\cap B_2$

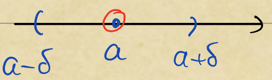
2^X X-ի բոլոր ենթաբազմությունները, $\mathcal{B}\subset 2^X\setminus\emptyset$

Օրինակներ $\quad$ 1) $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{B}=\{[n,\infty),\ n\in\mathbb{N}\}$

մաքսիմում

$$B_1=[n,+\infty),\ B_2=[m,+\infty) \Rightarrow B_1\cap B_2=[m\vee n,+\infty)\in\mathcal{B}$$

2) $X=\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $\mathcal{B}=\{(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},\ \delta>0\}$



$$B_i=(a-\delta_i,a+\delta_i)\setminus\{a\},\ i=1,2$$

մինիմում

$$\underset{\mathcal{B}}{\underset{\cap}{B_1\cap B_2=(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}}},\quad \delta=\delta_1\wedge\delta_2$$

3) $X=\{[a,b]$ հատվածի բոլոր նշված կետերով տրոհումներ$\}$

$$B_d=\{(P,\xi):\ \lambda(P)<d\},\ d>0,\ B_d\neq\emptyset,\ \mathcal{B}=\{B_d,\ d>0\}$$

$$B_{d_1},B_{d_2}\in\mathcal{B} \Rightarrow B_{d_1}\cap B_{d_2}=B_{d_1\wedge d_2}\in\mathcal{B}$$

Սահմանում $\quad X$, $F: X\to\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ հենք է X-ի վրա, $A\in\mathbb{R}$

$$A=\lim_{\mathcal{B}} F \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon>0 \quad \exists B\in\mathcal{B} \quad \forall y\in B \quad |F(y)-A|<\varepsilon$$

Օրինակներ 1) $X=\mathbb{N},\quad \mathcal{B}=[n,+\infty),\quad \{a_n\}_{n\geq 1},\quad A\in\mathbb{R}$

$$A=\lim_{\mathcal{B}} a_n \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon>0 \quad \exists B=[n_\varepsilon,+\infty) \quad \underset{n\geq n_\varepsilon}{\overset{\forall n\in B}{\Updownarrow}} \quad |a_n-A|<\varepsilon$$

2) $X=\mathbb{R},\quad a\in\mathbb{R},\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad A\in\mathbb{R},\quad \mathcal{B}=\{(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\},\ \delta>0\}$

$$A=\lim_{\mathcal{B}} f \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon>0 \quad \underline{\exists B_\varepsilon\in\mathcal{B} \quad \forall x\in B_\varepsilon} \quad |f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists\ \delta_\varepsilon>0 \quad \forall x\in(a-\delta_\varepsilon,a+\delta_\varepsilon)\setminus\{a\}$$

3) $X=\{(P,\xi)\},\quad \mathcal{B}=\{B_d,\ d>0\},\quad B_d=\{(P,\xi):\ \lambda(P)<d\}$

$$I=\lim_{\lambda(P)\to 0}\sigma(f;P,\xi) \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists B_d\in\mathcal{B} \quad \forall (P,\xi)\in B_d$$

$$|\sigma(f,P,\xi)-I|<\varepsilon$$

Լեմմ 2 $X,\ F:X\to\mathbb{R},\ \mathcal{B}$ բազա X-ի վրա

ա) Եթե F-ը ունի սահման ըստ $\mathcal{B}$ բազայի, ապա այն միակն է:

բ) $\exists \lim_{\mathcal{B}} F \iff \forall\varepsilon>0 \quad \exists B\in\mathcal{B} \quad \forall y_1,y_2\in B \quad |F(y_1)-F(y_2)|<\varepsilon$

Ապացույց ա) $A_i=\lim_{\mathcal{B}} F,\quad i=1,2,\quad A_1\neq A_2$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}|A_1-A_2| \Rightarrow \exists B_i\in\mathcal{B} \quad \forall y\in B_i \quad |F(y)-A_i|<\varepsilon$$

$$\exists\ B\in\mathcal{B} \quad B_1\cap B_2\supset B \Rightarrow y\in B\subset B_i,\quad \underline{|A_1-A_2|}\leq|A_1-F(y)|+|A_2-F(y)|$$

$$\underline{<}\ 2\varepsilon=\underline{|A_1-A_2|}$$

բ) $\Leftarrow$ $\quad \varepsilon_n=\frac{1}{n}\to \quad B_n\in\mathcal{B} \quad \forall y_1,y_2\in B_n \quad |F(y_1)-F(y_2)|<\frac{1}{n}$

$C_1 = B_1,\quad C_2 \subset B_1 \cap B_2, \dots, \quad C_n \subset C_{n-1} \cap B_n$

Կարող ենք ենթադրել, որ $B_1 \supset B_2 \supset \dots B_n \supset \dots$

Դիցուք $\varphi_n \in B_n$: Այդժամ $\forall k, m \geq n \quad |F(\varphi_k) - F(\varphi_m)| < \frac{1}{n}$

Հետևաբար $\{F(\varphi_n)\}$-ը Կոշու հաջորդականություն է $\Rightarrow A = \lim\limits_{n\to\infty} F(\varphi_n)$

Ապացուցենք, որ $A = \lim\limits_{B} F$: Դիցուք $\varepsilon > 0$: Այդժամ

$$\exists n_\varepsilon \geq 1 \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad |F(\varphi_n) - A| < \varepsilon$$

Կարող ենք ենթադրել, որ $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$:

$$\forall \varphi \in B_{n_\varepsilon} \quad |F(\varphi) - A| \leq \underbrace{|F(\varphi) - F(\varphi_{n_\varepsilon})|}_{< \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon} + \underbrace{|F(\varphi_{n_\varepsilon}) - A|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$