$f(x) \to F(x)$, $\forall x \in (a,b)$ $F'(x)=f(x)$, $F(x)=\int f(x)dx$ անորոշ ինտեգրալ

Գծայնությունը $\int (f+cg)\,dx = \int f\,dx + c\int g\,dx$

Մասերով ինտեգրում $\int u\,dv = uv - \int v\,du \overset{def}{\Longleftrightarrow} \int u(x)v'(x)dx = (uv)(x) - \int v(x)u'(x)dx$

Փոփոխականի փոխարինում $\underbrace{\int f(x)\,dx}_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Ռացիոնալ ֆունկցիաների ինտեգրալները

Սահմանում. Կասենք, որ f-ը ռացիոնալ ֆունկցիա է, եթե $\exists\, P, Q$ բազմանդամներ, այնպիսիք, որ

(1) $$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \qquad \Big(\deg P \geq \deg Q \Rightarrow P(x) = r(x)Q(x) + \underset{\text{մնացորդ}}{r_1(x)}\Big)$$

Թեորեմ Դիցուք $x_1, \dots, x_m, z_1, \bar z_1, \dots, z_k, \bar z_k$ -ը Q բազմանդամի արմատներն են, ընդ որում դրանց պատիկությունները են $l_1, \dots, l_m, n_1, \dots n_k$: Այդժամ

(2) $$f(x) = r(x) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{l_j} \frac{a_{ij}}{(x-x_j)^i} + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} \frac{c_{ij}x + d_{ij}}{(x^2+p_jx+q_j)^i},$$

որտեղ r-ը բազմանդամ է, $a_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, ընդ որում

$$x^2 + p_jx + q_j = (x-z_j)(x-\bar z_j)$$

$Q(x)$, $\deg Q = n$, $Q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$, $b_n \neq 0$, $b_j \in \mathbb{R}$

$Q(z_1) = 0 \Rightarrow Q(x) = (x-z_1)Q_1(x) = (x-z_1)(x-z_2)Q_2(x) = \dots = \prod_{j=1}^{n}(x-z_j)$

$= \prod_{i=1}^{k}(x-u_i)^{l_i}$, $u_i \in \mathbb{C}$, $l_i \geq 1$, $i \neq j \Rightarrow u_i \neq u_j$

$l_i = u_i$ արմատի պատիկությունն է

Քանի որ $b_j = \bar b_j \in \mathbb{R}$, ապա $\overline{Q(x)} = Q(\bar x)$:

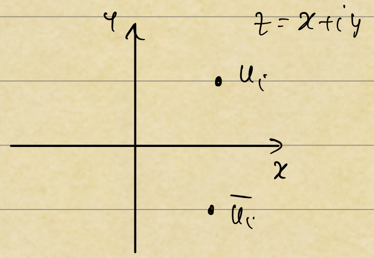
$Q(x) = (x-z)Q_1(x)$

$\overline{Q}(x) = Q(\bar x)$

$= (\bar x - \bar z)\overline{Q_1(x)}$

$$\prod_{i=1}^{k} (x-\bar{u}_i)^{e_i} = \prod_{i=1}^{k} (x-u_i)^{e_i} = Q(x)$$

u_i-ն արմատ է, ապա $\bar{u}_i$ նույնպես արմատ է



$$\overbrace{e_1 \ldots e_m}$$
$x_1, \ldots, x_m$ Q-ի իրական արմատներ

$\underbrace{z_1, \bar{z}_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{z_k, \bar{z}_k}_{n_k}$ Q-ի կոմպլեքս արմատներ

$$Q(x) = (x-x_1)^{e_1} \cdots (x-x_m)^{e_m} \Big(\underbrace{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)}_{x^2+p_1x+q_1}\Big)^{n_1} \cdots \Big(\underbrace{(x-z_k)(x-\bar{z}_k)}_{=x^2+p_kx+q_k}\Big)^{n_k}$$

Թեորեմի ապացույցի պլանը

- $\deg P < \underset{n}{\underset{\shortparallel}{\deg Q}}$, P-ն և Q-ն ընդհանուր արմատներ չունեն

- $n=1$: $\quad f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a}{x-x_1}$

$n=2$: $\quad f(x) = \dfrac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{a(x-x_1)+ax_1+b}{(x-x_1)(x-x_2)} = \dfrac{a}{x-x_2} + \dfrac{c}{(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x-z_1)(x-\bar{z}_1)} = \frac{ax+b}{x^2 \underbrace{-(2\operatorname{Re} z_1)}_{p_1\in\mathbb{R}}x + \underbrace{|z_1|^2}_{q_1}}$$

$n \geq 2$:

$$Q(x) = (x-x_1)^n \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^k + (\text{ցածր կարգի անդամներ})}{(x-x_1)^n}$$

$$= \frac{a(x^k - x_1x^{k-1}) + (\text{ց.կ.ա})}{(x-x_1)^n}$$

$$= \frac{ax^{k-1}}{(x-x_1)^{n-1}} + \frac{\leq k-1 \text{ անդամներ}}{(x-x_1)^n}$$

$$= (\cdots) + \frac{c}{(x-x_1)^n}$$

$$Q(x) = (x-x_1)(x-x_2)\underbrace{Q_1(x)}_{\deg Q_1 = n-2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q_1(x)} \times \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2}\right)\frac{1}{x_1-x_2}$$

$$= \frac{1}{c}\underbrace{\frac{P(x)}{Q_1(x)(x-x_1)}}_{=n-1} - \frac{1}{c}\underbrace{\frac{P(x)}{Q(x)(x-x_2)}}_{=n-1}$$

Անհրաժեշտ է ինտեգրել հետևյալ ֆունկցիաները.

$$\frac{a}{(x-b)^i}, \quad \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^j} \qquad a,b,p,q \in \mathbb{R}, \quad i,j \geq 1$$

- $i \geq 2$ $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{(x-b)^i} = \frac{1}{1-i}(x-b)^{1-i}$

- $i = 1$ $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{x-b} = \ln|x-b|$

- $x^2+px+q = (x+c)^2+d^2$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{ax+b}{(x+c)^2+d^2}\,dx \underset{x+c=y}{=} \int \frac{ay+b-ac}{y^2+d^2}\,dy \Big|_{y=x+c}$$

Բավական է հաշվել $\displaystyle\int \frac{ax+b}{(x^2+d^2)^j}\,dx$ ինտեգրալները

- $$\int \frac{x}{(x^2+d^2)^j}\,dx \underset{\substack{y=x^2+d^2 \\ dy=2x\,dx}}{=} \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+d^2)}{(x^2+d^2)^j} = \frac{1}{2}\begin{cases} \ln(x^2+d^2), & j=1 \\ \frac{1}{1-j}(x^2+d^2)^{1-j}, & j \geq 2 \end{cases}$$

- $b=1, \; j=1$

$$\int \frac{dx}{x^2+d^2} \underset{x=dy}{=} \frac{1}{d^2}\times d\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{d}\operatorname{arctg} y \underset{y=\frac{x}{d}}{=} \frac{1}{d}\operatorname{arctg}\frac{x}{d}$$

- $j > 1, \; b=1$ $\quad \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+d^2)^j} \underset{x=dy}{=} \frac{d}{d^{2j}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^j}$

$$I_j = \int \frac{dy}{(1+y^2)^j} = \int \frac{(1+y^2)\,dy}{(1+y^2)^{j+1}} = \int \frac{dy}{(1+y^2)^{j+1}} + \int \frac{y^2\,dy}{(1+y^2)^{j+1}}$$

t

$$= \underbrace{\int \frac{d\varphi}{(1+\varphi^2)^{j+1}}}_{I_{j+1}} + \frac{1}{2}\int \frac{\varphi \, d(\varphi^2+1)}{(1+\varphi^2)^{j+1}} = I_{j+1} + \frac{1}{2}\int y \, d\left(-\frac{1}{j}(1+\varphi^2)^{-j}\right)$$

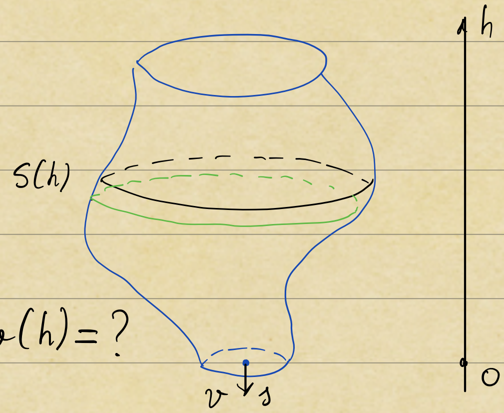
$$= I_{j+1} - \frac{1}{2j}\,\frac{y}{(1+\varphi^2)^j} + \frac{1}{2j}\underbrace{\int \frac{dy}{(1+\varphi^2)^j}}_{=I_j}$$

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{2j}\right) I_j + \frac{1}{2j}\,\frac{y}{(1+y^2)^j} = I_{j+1}}$$

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx \quad , \quad \int R(x, f(x))\,dx = \int R(\varphi(t), (f\circ\varphi)(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$x=\varphi(t)$ ռացիոնալ, $f(\varphi(t))$ ռացիոնալ

Անոթի դատարկումը



$v(h) = ?$

$[t, t+\Delta t]$

Էներգիայի պահպանման օրենքը

$h(t) \to h(t+\Delta t)$ $\quad \Delta m$

$$\Delta E_p = \underbrace{S(h)(h(t) - h(t+\Delta t))\,\rho}_{\text{զանգված}}\, h(t)\, g$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}\Delta m \cdot v^2 \iff \Delta m \cdot h(t)\, g = \frac{1}{2}\Delta m\, v(h)^2$$

$$\iff \boxed{v(h) = \sqrt{2gh}}$$

Ջրի դեպքում $\quad v(h) = 0,6\sqrt{2gh}$

Ջրի մակերևույթի փոփոխությունը

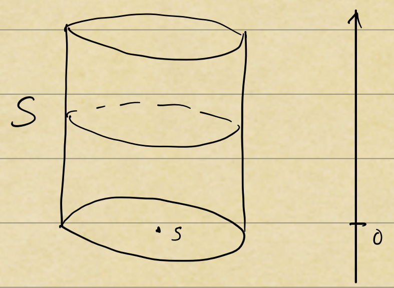
$$\Delta V(t) = (h(t) - h(t+\Delta t))\, S(h(t+\Delta t)) = (v(h(t))\Delta t) \times s$$

$$\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = -\frac{s \times 0,6\sqrt{2g\,h(t)}}{S(h(t+\Delta t))}$$

Անցնում ենք սահմանի, երբ $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{h'(t) = -\frac{0{,}61\sqrt{2g\,h(t)}}{S(h(t))}}$$

Խնդիր 5.7.6 (10) Ուղղահայաց դրված գլանաձև ամանի կեսը դատարկվեց 5 րոպեում: Քանի՞ րոպեում կդատարկվի ամբողջ ամանը:



$$\dot h = -c\sqrt{h}, \qquad h(0) = h_0, \quad h(5) = \frac{h_0}{2}$$

Անհրաժեշտ է գտնել այնպիսի $t_0>0$, որ $h(t_0)=0$:

$\forall t \in [0, t_0) \qquad h(t) > 0$

$$\frac{\dot h(t)}{2\sqrt{h(t)}} = \underbrace{-\frac{1}{2}c}_{a} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\dot h(t)}{2\sqrt{h(t)}}\,dt = -at+b \qquad t<t_0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{h(t)} = -at+b \qquad 0 \le t < t_0$$

$t=0 \Rightarrow \sqrt{h_0} = b$

$t=t_0 \Rightarrow 0 = -at_0+b \Rightarrow t_0 = \frac{b}{a}$

$t=5 \Rightarrow \sqrt{\frac{h_0}{2}} = -5a+b \Rightarrow \frac{b}{\sqrt2} = -5a+b \Rightarrow a = \frac{b-\frac{b}{\sqrt2}}{5}$

$$t_0 = \frac{5b}{b-\frac{b}{\sqrt2}} = \frac{5\sqrt2}{\sqrt2-1} = 5\sqrt2(\sqrt2+1) = 17 \text{ րոպե}$$

$\dot x = v(x), \qquad \dot x = v(x)\,a(t)$