Ներածություն

- ✓ 1. Միջին արժեքի թեորեմը
- ✓ 2. Թեյլորի բանաձևը
- 3. Հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը
- 4. Անբացահայտ ֆունկցիայի թեորեմը
- 5. Ստոքսի բանաձևը

① $f \in C([a,b]) \cap \{$ածանցելի (a,b)-ի վրա$\} \Rightarrow f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$, $\exists \xi \in (a,b)$

② $f \in C^{(n)}((a,b))$, $x_0 \in (a,b) \Rightarrow f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{Թեյլորի բազմանդամ}} + \underbrace{o((x-x_0)^n)}_{}$ Մնացորդային անդամ

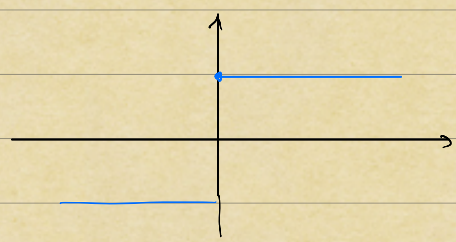
§1. Անորոշ ինտեգրալ

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$g: (a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad f: (a,b) \to \mathbb{R}$, $\quad \forall x \in (a,b) \quad f'(x) = g(x) \qquad (1)$

Սահմանում Կասենք, որ f-ը g-ի նախնական է, եթե տեղի ունի (1)-ը:

Օրինակ 1) $g(x) = \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow \nexists f: (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\cancel{f'(0)=0}$ և f-ը g-ի նախնական է



$f(x) = x + C_1 \quad \forall x \in (0,1)$

$f(x) = -x + C_2 \quad \forall x \in (-1,0)$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = C_1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$

$f(x) = |x| + C \qquad \forall x \neq 0$

2) $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$

$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

f' չունի սահման, երբ $x \to 0$ $\Rightarrow$ f' անընդհատ չէ 0 կետում:

Թեորեմ Եթե $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ֆունկցիան ունի նախնական, ապա այն միակն է հաստատունի ճշտությամբ:

f_1, f_2 g-ի նախնականներն (a,b)-ի վրա $\Rightarrow$ $f_1 - f_2 \equiv C$

Ապացույց $f_1, f_2 : (a,b)\to\mathbb{R}$, $\forall x\in(a,b)$ $f_1'(x) = f_2'(x) = g(x)$

$f = f_1 - f_2$, $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ածանցելի է, $\forall x\in(a,b)$ $f'(x)=0$

$[c,d]\subset(a,b)$, $[c,d]$-ի համար բավարարված են ՄԱԹ պայմանները.

$$\exists\, \xi_{c,d}\in(c,d) \qquad f(d)-f(c) = f'(\xi_{c,d})(d-c) = 0$$

$$\forall\, c<d \qquad f(d)=f(c) \Rightarrow f\equiv C \quad \blacksquare$$

Օրինակներ 1) $g(x) = \frac{1}{x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

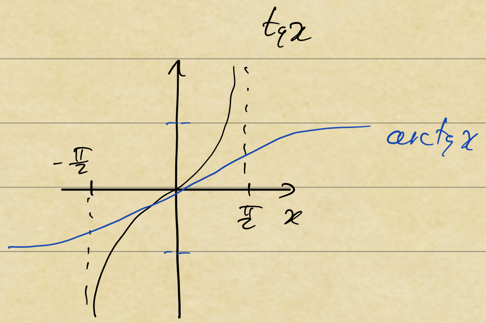
$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x), & x<0 \end{cases}, \qquad f'(x) = g(x), \quad x\neq 0$$

$$\frac{d}{dx}\ln(-x) = \frac{1}{-x}\times(-1) = \frac{1}{x}$$

$$f_1(x) = f(x) + C$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln x, & x>0 \\ \ln(-x)+1, & x<0 \end{cases}, \qquad f_2'(x) = g(x), \quad x\neq 0$$

2) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$g(x) = f^{-1}(x)$ հակադարձ ֆունկցիա

$= \operatorname{arctg} x$

$f(g(x)) = x$

$f(x) = x^3 \rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $\qquad f(x) = y \Leftrightarrow x^3 = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{3}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{-\frac{2}{3}}$$ գոյություն չունի

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x \Longleftrightarrow f'(g(x))\, g'(x) = 1$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$g(x) = \operatorname{arctg} x, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$g_1(x) = \operatorname{arcctg} x, \quad g_1'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad h(x) = g_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad h'(x) = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{1}{1+x^2}$

Ուրեմն ճիշտ է այն, որ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Նախնական $\quad f : (a,b) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int f(x)\,dx + C \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in (a,b)\ F'(x) = f(x)$

$G(x) = \int f(x)\,dx, \quad F(x) = \int f(x)\,dx \Rightarrow F - G \equiv C$

Անորոշ ինտեգրալի հատկությունները

Գծայնություն $\quad \forall u, v : (a,b) \to \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \int (\alpha u + \beta v)\,dx = \alpha \int u\,dx + \beta \int v\,dx$

$$F(\alpha u+\beta v) = \alpha F(u)+\beta F(v)$$

Ապացույց $\quad F=\int u\,dx,\quad G=\int v\,dx \longrightarrow \alpha F+\beta G$

$$\frac{d}{dx}(\alpha F+\beta G) = \alpha u+\beta v \quad ?$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha F+\beta G) = \alpha\frac{dF}{dx}+\beta\frac{dG}{dx} = \alpha u+\beta v \qquad \blacksquare$$

Մասերով ինտեգրում

[illegible]

Դիցուք տրված են u, v ածանցելի ֆունկցիաներ: Այդ

$$\int u'v\,dx = uv-\int uv'\,dx \overset{\text{def}}{\iff} \int v\,\underbrace{du}_{u'dx} = uv-\int u\,\underbrace{dv}_{v'dx}$$

Ապացույց $\quad \dfrac{d}{dx}(uv) = u'v+uv' \qquad \Big|\quad df(x) = f'(x)\,dx$

$$uv = \int(u'v+uv')\,dx = \int u'v\,dx+\int uv'\,dx \Rightarrow \int u'v\,dx = uv-\int uv'\,dx \qquad \blacksquare$$

Փոփոխականի փոխարինում

Դիցուք տրված $\varphi:(a,b)\to(c,d)$ C^1 դասի ֆունկցիա և $f:(c,d)\to\mathbb{R}$, $F\in C^1(c,d)$, $\forall x\in(c,d)$ $F'(x)=f(x)$: Այդ

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) \iff \int F(\varphi(t))\,\underbrace{d\varphi(t)}_{\varphi'(t)dt} = F(\varphi(t))$$

Սահմանում. $\quad F\in C^1(c,d) \overset{\text{def}}{\iff} \forall x\in(c,d)\ \exists F'(x)$ և $F':(c,d)\to\mathbb{R}$ անընդհատ է

Ապացույց $\quad \dfrac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t)) = \int F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \qquad \blacksquare$

Օրինակներ

1) $$\int(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)\,dx = a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\dots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

2) $$\int\cos^2x\,dx = \int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$$

3) $$\int\underbrace{\ln x}_{v}\,\underbrace{dx}_{u} \underset{x>0}{=} x\ln x-\int\underbrace{x\,\frac{1}{x}}_{\equiv 1}\,dx = x\ln x-x$$

4) $\int e^x P_n(x)\,dx = \int \underbrace{P_n(x)}_{u}\, d\,\underbrace{e^x}_{v} = e^x P_n(x) - \int e^x P_n'(x)\,dx$

$$= e^x P_n(x) - \int P_n'(x)\, d e^x$$

$$= e^x P_n(x) - e^x P_n'(x) + \int e^x P_n''(x)\,dx$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k P_n^{(k)}(x) + (-1)^n \int e^x P_n^{(n)}(x)\,dx$$

$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P_n^{(k)}(x)$$

5) $\frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\, d\,\frac{1}{2}(t^2+1) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\, \underbrace{d(t^2+1)}_{x} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$

6) $\int \arcsin x\,dx = \arcsin x \cdot x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$